Esercizio da svolgere

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x^2}}.$$

1. Determinare il dominio di f, gli eventuali zeri e il segno di f.
2. Stabilire se f è continua nel suo dominio e determinare i limiti al bordo del dominio di f.
3. Determinare il dominio di definizione della derivata prima e calcolare f'.
4. Studiare la monotonia di f e determinare gli eventuali punti estremanti, specificando se sono assoluti o relativi.
5. Tracciare un grafico qualitativo della funzione f.
6. Sfruttando lo studio di f svolto nei punti precedenti, si tracci un grafico qualitativo della funzione integrale
$$F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$
dove l'integrale è da intendersi eventualmente in senso improprio.

Soluzioni

1. Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +1) \cup (+1, +\infty)$.

   Zeri e segno: La funzione f non presenta zeri. $f(x) > 0$ se $x \in (+1, +\infty)$, $f(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$.

2. Continuitá: $f \in C(D)$ come composta di funzioni continue.

   Limiti (e asintoti): In base alle proprietá dei limiti abbiamo

   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = 0^-, \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = 0^+$$

   ed in particolare un asintoto verticale per $x \to -1^-$ e per $x \to 1^-$. Asintoti obliqui:

   $$m := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

   $$q := \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} (x-1)\Big(e^{\frac{x}{1-x^2}} - 1\Big) - 1 = -2$$

   equazioni asintoti: $y = x - 2$ per $x \to \pm\infty$.

3. Derivabilitá: f è derivabile in D come composta di funzioni derivabili ed in base alla regola di Leibniz e al teorema di derivazione della funzione composta abbiamo

   $$f'(x) = e^{\frac{x}{1-x^2}} \left[1 + \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}\right] \qquad x \in D$$

4. Punti critici in D: $f'(x) = 0$ se

   $$\begin{aligned} 1 + \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} &= 0 \\ (x-1)(x+1)^2 + (x^2+1) &= 0 \\ x^3 + 2x^2 - x &= 0 \\ x(x^2+2x-1) &= 0. \end{aligned}$$

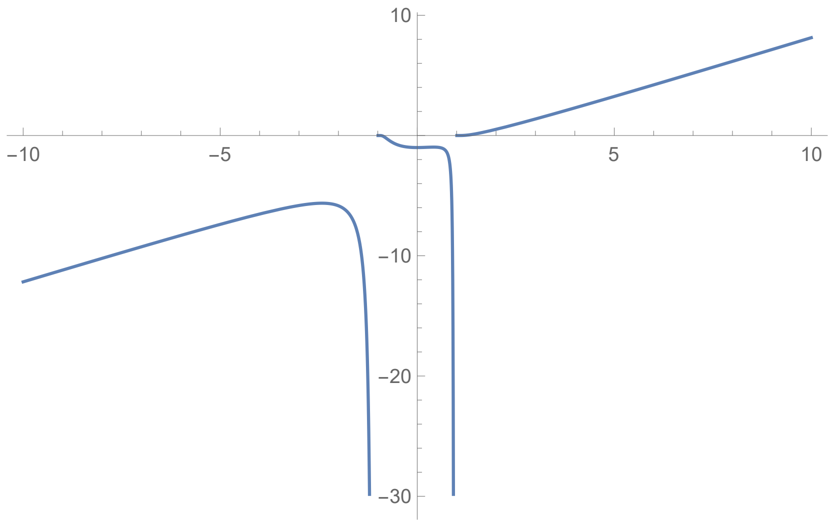
   Vi sono tre punti critici: $x = 0$, $x := \sqrt{2} - 1 \in (0, 1)$ e $x = -\sqrt{2} - 1 \in (-\infty, -1)$.

   Monotonia ed estremi in D: per il Test di Monotonia, poichè $f'(x) > 0$ se

   $$\begin{aligned} 1 + \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2} &> 0 \\ \frac{x(x^2+2x-1)}{(x-1)(x+1)^2} &> 0, \end{aligned}$$

   f è crescente in $(-\infty, -\sqrt{2}-1) \cup (0, \sqrt{2}-1) \cup (1, +\infty)$ e decrescente in $(-\sqrt{2}-1, -1) \cup (-1, 0) \cup (\sqrt{2}-1, 1)$, da cui $x = 0$ è un punto di minimo relativo e i punti $x = -\sqrt{2}-1$ e $x = \sqrt{2}-1$ sono punti di massimo relativo.

5. Il grafico qualitativo di f è mostrato in figura.



6. Dai punti precedenti sappiamo che la funzione integranda

$$f(t) = (t-1)e^{\frac{t}{1-t^2}}$$

è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Quindi f è integrabile secondo Riemann su ogni intervallo chiuso in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ che non contiene $t = \pm 1$. Abbiamo allora

$$(-\infty, -1) \subset \operatorname{dom}(F) \quad \text{e} \quad F(-3) = 0.$$

Nel punto problematico $t = -1$ ci servono gli sviluppi asintotici di f. Si osserva che

$$f(t) \sim -2e^{-\frac{1}{2(t+1)}} \quad \text{per} \quad t \to -1^-.$$

Quindi f non è integrabile in senso improprio in un intorno sinistro di $t = -1$ e si ha

$$\operatorname{dom}(F) = (-\infty, -1).$$

Per il TFCI F è derivabile in ogni punto di continuità di f con derivata $F'(x) = f(x)$, cioè

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per } x < -1.$$

Dai punti precedenti sappiamo che f è negativa in $(-\infty, -1)$. Quindi F è decrescente per $x \in (-\infty, -1)$ e

$$\lim_{x \to -1^-} F(x) = -\infty,$$

da cui $x = -1$ è un asintoto verticale per F.
Sempre dai punti precedenti sappiamo che

$$f(t) \sim t \to -\infty \quad \text{per} \quad t \to -\infty.$$

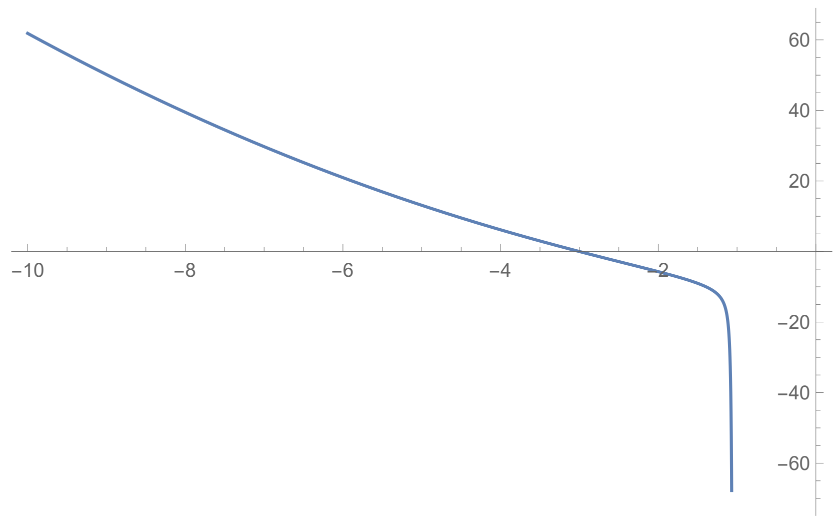
Pertanto f non è integrabile in senso improprio in un intorno di $-\infty$ e quindi

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = +\infty.$$

Inoltre, essendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} F'(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

allora F non possiede obliquo per $x \to -\infty$.
Dallo studio del segno di f', si ricavano informazioni sul segno di F'' in $(-\infty, -1)$. Più precisamente F è convessa per $x \in (-\infty, -1-\sqrt{2})$ ed è concava per $x \in (-1-\sqrt{2}, -1)$.
Il grafico qualitativo di F è mostrato in figura.


60
40
20
−10
−8
−6
−4
−2
−20
−40
−60