STUDIO DI FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} x\, e^{3\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

1) Dominio, segno, zeri

$D(f) = \mathbb{R}$

$f(x) = 0$ se $x = 0$ e se $x e^{3\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$ con $x \neq 0$

$\Longrightarrow x = 0$ è l'unico zero di f.

$f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$.

2) Continuità, limiti, asintoti

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, perché prodotto e composizione di funzioni elementari. Per studiare la continuità in 0, consideriamo

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^{\pm}} x\, e^{3\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} = 0 \cdot e^{3\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= 0 = f(0)$$

$\Longrightarrow f$ è continua anche in $x = 0$.

Inoltre $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = (\pm\infty) \underbrace{e^{0}}_{=1} = \pm\infty$, quindi potremmo avere asintoti obliqui. In effetti

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{3\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} = 1,$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} x \left(e^{3\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \left(3\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \frac{3}{x} = 3$$

$\Longrightarrow$ $y = x + 3$ è un asintoto obliquo sia a $+\infty$, che a $-\infty$.

3) <u>Derivabilità e calcolo di $f'(x)$</u>

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché combinazione di funzioni elementari derivabili. Si ha

$$f'(x) = e^{3\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \left(1 + x \cdot \underbrace{\frac{3}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{} \right)$$

$$= \frac{3\cancel{x^2}}{x^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)$$

$$= e^{3\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \left(\frac{x^2+1 - 3x}{1+x^2} \right)$$

Per studiare la derivabilità in 0, usiamo il teorema sul limite della derivata: poiché f è continua in 0,

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) \quad (\text{se questi limiti esistono})$$

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0^{\pm}} \left(\frac{x^2+1-3x}{1+x^2} \right) e^{3 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= 1 \cdot e^{3 \arctan(\pm \infty)} = e^{\pm \frac{3\pi}{2}}$$

Quindi f ha un punto angoloso in $x = 0$.

4) Monotonia ed estremi locali

Usiamo il test di monotonia, e studiamo il segno di f'.

$$f'(x) > 0 \iff x^2 - 3x + 1 > 0 \iff \dots$$

$$\left(x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\dots \iff x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Quindi f è crescente per $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e per $x > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, decrescente per $x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$, e ha 2 punti critici in $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$: punto di massimo locale

$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$: " " minimo locale.

Non ci sono estremi assoluti, dato che $f \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$.

(Non è richiesto lo studio della convessità, ma lo aggiungo per completezza)

Studiamo la convessità di f con lo studio del segno di f''. $f''(x)$ è definita per $x \neq 0$, e

$$f''(x) = e^{3\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \left(\frac{(2x-3)(1+x^2) - 2x(x^2-3x+1)}{(1+x^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^2-3x+1}{1+x^2} \cdot \left(- \frac{3}{1+x^2} \right) \right) =$$

$$= e^{3\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \left(\frac{\cancel{2x} + \cancel{2x^3} - 3 - \cancel{3x^2} - \cancel{2x^3} + \cancel{6x^2} - \cancel{2x} - \cancel{3x^2} + 9x - 3}{(1+x^2)^2} \right)$$

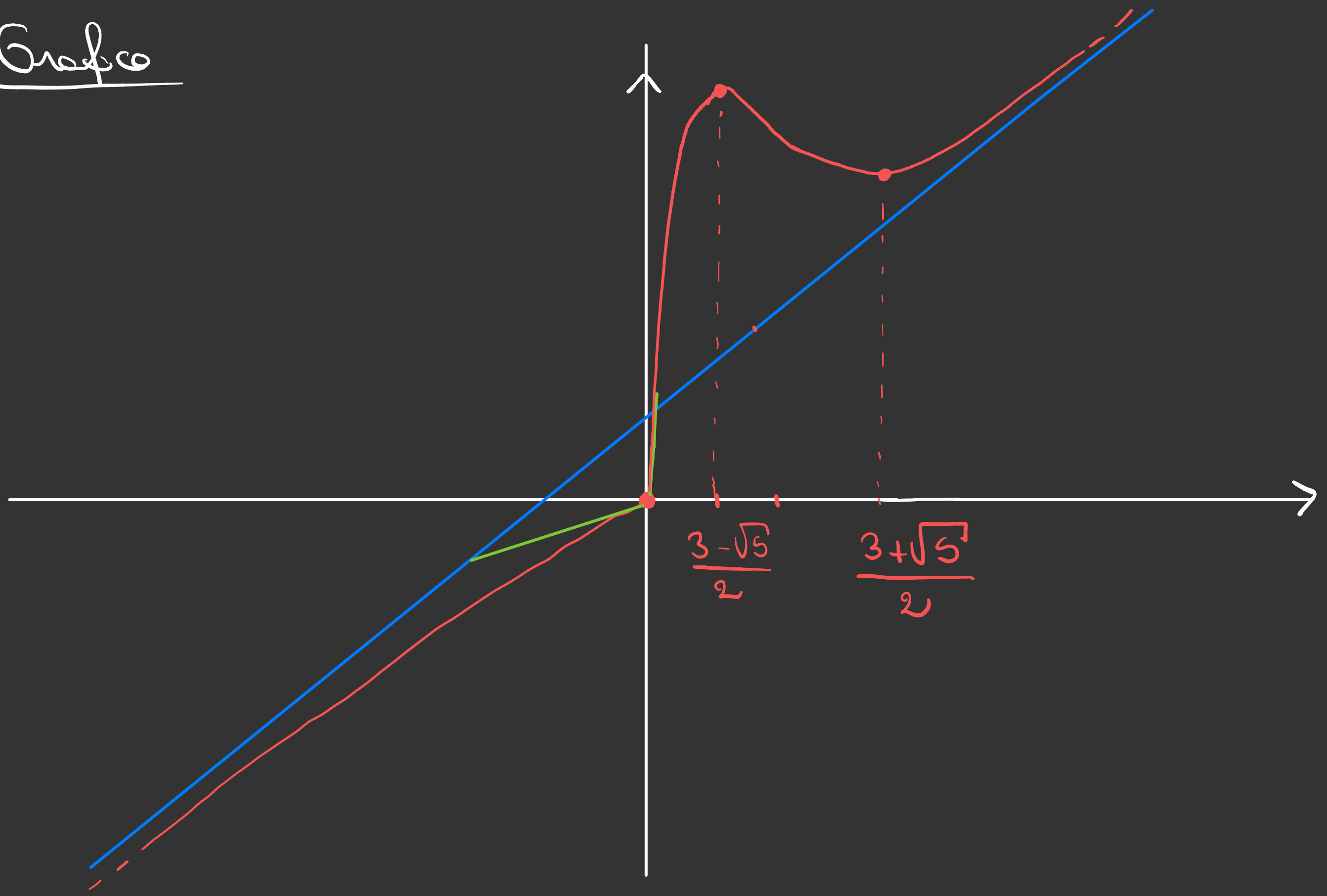
$$= \frac{e^{3\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}}{(1+x^2)^2} \cdot (9x-6)$$

$$f''(x) > 0 \iff x > \frac{2}{3}.$$

Si vede quindi che $x = \frac{2}{3}$ è un punto di flesso.

f è convessa per $x > \frac{2}{3}$, concava per $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \cup (-\infty, 0)$.

5) Grafico



6) Determiniamo le primitive di $g(x) = f'(x)\, e^{-3\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$

$$g(x) = \frac{x^2+1-3x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \int g(x)\,dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx - 3\int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \int 1\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$2x = (x^2+1)'$

$$= x - \frac{3}{2}\log(1+x^2) + c, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Di conseguenza, per il (primo) teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \left[x - \frac{3}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1 = 1 - \frac{3}{2}\log 2$$