AG1 - 15/6/21

1) DOBBIAMO RICHIEDERE

$$(x>-1) \wedge (x<1)$$

QUINDI

$$\mathrm{Dom}(f) = (-1,1).$$

ESSENDO

$$f(x) = f(-x)$$

f È PARI.

POICHÉ

$$\lim_{\substack{x \to -1^+ \\ (1^-)}} f(x) = 2\ln 2 - 2$$

NON VI SONO ASINTOTI.

2) f È CONTINUA IN $(-1,1)$ ED È PROLUNGABILE CON CONTINUITÀ IN ± 1 PONENDO

$$f(\pm 1) = 2\ln 2 - 2.$$

3) AVREMO $\mathrm{Dom}(f') = (-1,1)$

E $f'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 4x$.

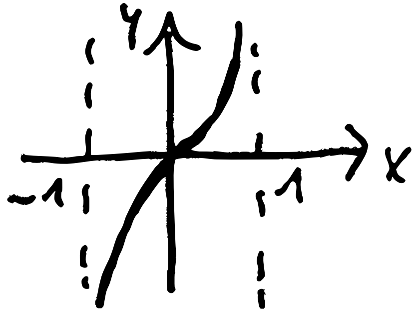
OSSERVIAMO ANCHE CHE

$$\lim_{\substack{x \to -1^+ \\ (1^-)}} f'(x) = -\infty. \quad (+\infty)$$

4) È FACILE OSSERVARE CHE IL GRAFICO DI

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

È IL SEGUENTE



DOVE

$$g'(0) = 2$$

ESSENDO

$$g'(x) = \frac{2}{1-x^2}$$

PERCIÒ, CONFRONTANDO

$g(x)$ con $h(x) = 4x$,

RICAVIAMO CHE

ESISTONO $\alpha, -\alpha \in (-1, 1)$

TALI CHE

$$f'(x) = g(x) - h(x)$$

$$= \begin{cases} > 0 & \alpha < x < 1 \\ < 0 & 0 < x < \alpha \\ > 0 & -\alpha < x < 0 \\ < 0 & -1 < x < -\alpha \end{cases}$$

DUNQUE

	-1		$-\alpha$		0		α		1
f'	|	$- - -$	|	$+ + +$	|	$- - -$	|	$+ + +$	|
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$(\pm\alpha, f(\pm\alpha))$ PUNTI DI MINIMO

$(0,0)$ PUNTO DI MASSIMO

CONSIDERANDO L'ESTENSIONE CONTINUA E USANDO IL TEOREMA DI WEIERSTRASS DEDUCIAMO CHE $(\pm\alpha, f(\pm\alpha))$ SONO PUNTI DI MINIMO GLOBALE, $(0,0)$ INVECE È UN PUNTO DI MASSIMO GLOBALE.

5) $\mathrm{Dom}(f'') = (-1, 1)$

E RISULTA

$$f''(x) = \frac{2}{1-x^2} - 4.$$

6) OSSERVIAMO CHE

$$f''(x) \geq 0$$

SE E SOLO SE

$$\frac{1}{2} \geq 1 - x^2$$

OVVERO $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |x| < 1$

QUINDI

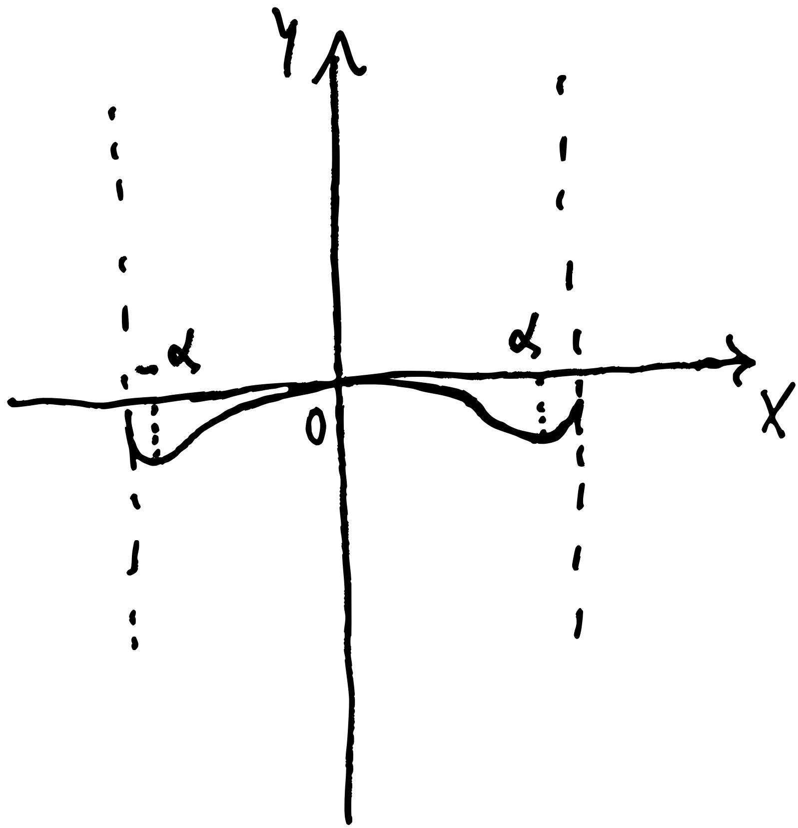
	-1 … $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ … $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ … 1
f''	$+++$	$---$	$+++$
f	$\cup$	$\cap$	$\cap$

PERTANTO

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

SONO PUNTI DI FLESSO PER IL GRAFICO DI f.

7) AVRERO



8) OSSERVIAMO CHE

$$f'(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 4x$$

E

$$\sqrt{1\pm x}\,\ln(1\pm x) \to 0$$

$$x \to -1^+$$
$$(1^-)$$

QUINDI

$$|\ln(1\pm x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1\pm x}}$$

PER $\delta < |x| < 1$ CON $\delta \in (0,1)$

OPPORTUNO.

CONCLUDIAMO CHE

$$\int_{-1}^{1} f'(x)\,dx$$

CONVERGE PER IL CRITERIO ASINTOTICO.

OSSERVIAMO ORA CHE

$$\int_{-1+\sigma}^{1-\varepsilon} f'(x)\,dx = f(1-\varepsilon) - f(-1+\sigma)$$

$$\forall \varepsilon, \sigma \in (0,1)$$

QUINDI $\displaystyle\int_{\to -1}^{\to 1} f'(x)\,dx = f(1) - f(-1) = 0.$