Terzo Appello: Esercizio

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2+x^2}{2-x^2}\right)$$

1) Dominio, simmetrie, asintoti:

- problematico solo il denominatore $2-x^2$

  $\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$

- $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ pari

- $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+x^2}{2-x^2} = -1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

  $\Rightarrow$ asintoto orizzontale $y = -\frac{\pi}{4}$ per $x \to \pm\infty$

  per $x \to \pm\sqrt{2}^{\pm}$ abbiamo $\frac{2+x^2}{2-x^2} \to \pm\infty$

  $\Rightarrow \displaystyle\lim_{\substack{x\to+\sqrt{2}^+ \\ (\text{o } x\to-\sqrt{2}^-)}} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ e $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\sqrt{2}^- \\ (\text{o } x\to-\sqrt{2}^+)}} f(x) = +\frac{\pi}{2}$

  $\Rightarrow$ nessun asintoto verticale

2) Continuità

- Nel dominio f composta di funzioni continue, allora è continua.
- Dato che $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\sqrt{2}^+ \\ -\sqrt{2}^-}} f(x) = -\frac{\pi}{2} \neq +\frac{\pi}{2} = \lim_{\substack{x\to+\sqrt{2}^- \\ -\sqrt{2}^+}} f(x)$,

  f non è prolungabile per continuità nei punti $x = \pm\sqrt{2}$

3) Derivata prima

- Nel dominio f composta di funzioni derivabili, allora è derivabile

  il dominio di f' è $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$

- Usiamo che

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1 \cdot (2-x^2)^2}{\left(\left(\frac{2+x^2}{2-x^2}\right)^2 + 1\right)\cdot(2-x^2)^2}}_{\frac{(2-x^2)^2}{(2+x^2)^2+(2-x^2)^2}} \cdot \frac{\overbrace{2x\cdot(2-x^2) - (2+x^2)(-2x)}^{8x}}{(2-x^2)^2} = \frac{8x}{(2+x^2)^2+(2-x^2)^2} = \frac{4x}{4+x^4}$$

4) Monotonia, punti estremanti

$$f'(x) = \frac{4x}{4+x^4} > 0 \iff 4x > 0 \iff x > 0$$

$\Rightarrow$ $x<0$ $x \neq -\sqrt{2}$	$x=0$	$x>0$, $x \neq \sqrt{2}$
decrescente	minimo	crescente

$$f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Dato che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$, concludiamo che f ha un minimo relativo in $x=0$.

Non esiste un massimo (relativo/assoluto)

5) Seconda derivata

Nel suo dominio, f' è derivabile.

Allora f'' esiste con dominio $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$.

$$f''(x) = \left(\frac{4x}{4+x^4}\right)' = \frac{4\cdot(4+x^4) - 4x\cdot 4x^3}{(4+x^4)^2} = \frac{16-12x^4}{(4+x^4)^2}$$

6) Convessità, punti di flesso

$$f''(x) = \frac{16-12x^4}{(4+x^4)^2} > 0 \iff 16-12x^4 > 0$$
$$\iff x^4 < \frac{4}{3}$$
$$\iff -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}} < x < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$$

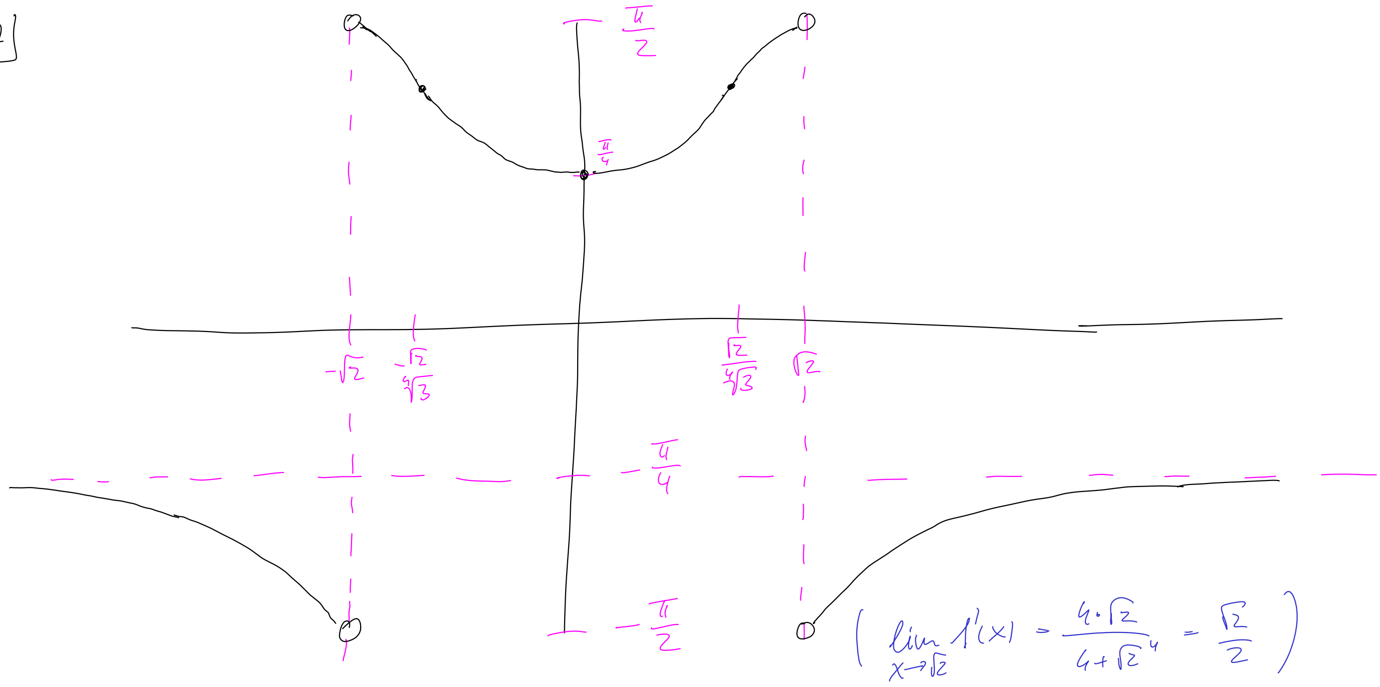
$\approx 1{,}075$

Allora

	$x<-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$, $x\neq-\sqrt{2}$	$x=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}<x<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$	$x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$	$x>\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$, $x\neq\sqrt{2}$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
	concava	punto di flesso	convessa	punto di flesso	concava

$$\left(f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{5\pi}{12} \right)$$

7)



8)

Sviluppo di Taylor in $x=0$ al ordine 3

La funzione è pari, allora $f'(0) = f'''(0) = 0$, allora è sufficiente calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2.

Abbiamo già tutti gli ingredienti:

$f(0) = \frac{\pi}{4}$

$f'(0) = 0$ (simmetria)

$f''(0) = \frac{16-12\cdot 0}{(4+0)^2} = 1$

$f'''(0) = 0$ (simmetria)

Allora troviamo che

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot x^2 + o(x^3)$$