Compito A

Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — *Primo compito in itinere – 8 Novembre 2021*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

Istruzioni. *Segare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora.*

---

1. (1 affermazione corretta, 1 punto) Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) In $\mathbb{R}$, una successione di numeri razionali non può convergere a $\sqrt{2}$. ○

   (b) Se $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $c \in \mathbb{Q}$ tale che $x < c < y$. ○

   (c) Se $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $c \in \mathbb{Z}$ tale che $x < c < y$. ○

   (d) In $\mathbb{R}$, ogni successione convergente è monotòna. ○

   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

2. (1 affermazione corretta, 1 punto) Siano $(a_n), (b_n)$ le successioni reali definite (per n intero positivo) nel modo seguente: $a_n = n \log_e \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, $\quad b_n = \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)^n$.

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$ ○

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$ ○

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ ○

   (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \mathrm{e}^{-1/2}$ ○

   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

3. (1 affermazione corretta, 1 punto) Poniamo: $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, $\; f(z) = z^4$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

   (a) Esiste un elemento nel codominio che ha esattamente 2 controimmagini. ○

   (b) Esiste un elemento del codominio che ha infinite controimmagini. ○

   (c) f è invertibile. ○

   (d) f è suriettiva. ○

   (e) f è iniettiva. ○

---

4. (1 affermazione corretta, 1 punto) Consideriamo il numero complesso $z = \dfrac{(1-\mathrm{i})^6}{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^2}$.

   (a) $|z| = 2$ ○

   (b) $|z| = \dfrac{1}{2}$ ○

   (c) $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$ ○

   (d) $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$ ○

   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

5. (1 affermazione corretta, 1 punto) Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua, $J = f(I)$ l'immagine di f.

(a) Se I è limitato superiormente, allora J è limitato superiormente. ○
(b) Se $J = \mathbb{R}$, f è invertibile. ○
(c) f assume massimo assoluto e minimo assoluto. ○
(d) J è un intervallo. ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

6. (1 affermazione corretta, 1 punto) Il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{\log_e(1+x^2) + e^{x^2} - 1}$ vale:

(a) 0 ○
(b) 1 ○
(c) 2 ○
(d) $\frac{1}{2}$ ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

7. (2 affermazioni corrette; 2 punti) Definiamo: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) f non è derivabile in 0. ☐
(b) f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$. ☐
(c) f è derivabile in 0 e $f'(0) = 3$. ☐
(d) Per $x \neq 0$, $f'(x) = 3 + 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$. ☐
(e) Per $x \neq 0$, $f'(x) = 3 + 2x \sin \dfrac{1}{x} + x^2 \cos \dfrac{1}{x}$. ☐

---

8. (2 affermazioni corrette; 2 punti) Sia f la funzione così definita:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{3x^4 - 4x^3}$$

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) > 0$ ☐
(b) $x_0 = 1$ è un punto di minimo locale per f. ☐
(c) $x_0 = 1$ è un punto di massimo locale per f. ☐
(d) Esiste un punto $a \in (0,1)$ in cui $f''(a) = 0$. ☐
(e) f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. ☐