

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora.

1. (1 affermazione corretta, 1 punto) Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) In \mathbb{R} , una successione di numeri razionali non può convergere a $\sqrt{3}$.
- (b) In \mathbb{R} , ogni successione convergente è monotona.
- (c) Se $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $c \in \mathbb{Q}$ tale che $x < c < y$.
- (d) Se $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $c \in \mathbb{Z}$ tale che $x < c < y$.
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

2. (1 affermazione corretta, 1 punto) Siano $(a_n), (b_n)$ le successioni reali definite (per n intero positivo) nel modo seguente: $a_n = n \log_e \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$.

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{e}{2}$
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$
- (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = e^{1/2}$
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

3. (1 affermazione corretta, 1 punto) Poniamo: $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, $f(z) = z^5$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

- (a) Esiste un elemento nel codominio che ha esattamente 3 controimmagini.
- (b) Esiste un elemento del codominio che ha infinite controimmagini.
- (c) f è iniettiva.
- (d) f è suriettiva.
- (e) f è invertibile.

4. (1 affermazione corretta, 1 punto) Consideriamo il numero complesso $z = \frac{(1+i)^6}{(1-i\sqrt{3})^2}$.

- (a) $|z| = 2$
- (b) $|z| = \frac{1}{2}$
- (c) $\arg z = \frac{\pi}{4}$
- (d) $\arg z = \frac{\pi}{2}$
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

5. (1 affermazione corretta, 1 punto) Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione continua, $J = f(I)$ l'immagine di f .

- (a) Se I è limitato inferiormente, allora J è limitato inferiormente.
- (b) Se $J = \mathbb{R}$, f è invertibile.
- (c) f assume massimo assoluto e minimo assoluto.
- (d) J è un intervallo.
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

6. (1 affermazione corretta, 1 punto) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3)}{\log_e(1+x^3) + e^{x^3} - 1}$ vale:

- (a) 0
- (b) $\frac{1}{2}$
- (c) 1
- (d) 2
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

7. (2 affermazioni corrette; 2 punti) Definiamo: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 5x + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- (a) f non è derivabile in 0.
- (b) f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$.
- (c) f è derivabile in 0 e $f'(0) = 5$.
- (d) Per $x \neq 0$, $f'(x) = 5 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.
- (e) Per $x \neq 0$, $f'(x) = 5 + 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x}$.

8. (2 affermazioni corrette; 2 punti) Sia f la funzione così definita:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{3x^4 + 4x^3}$$

- (a) f è strettamente crescente su \mathbb{R} .
- (b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) > 0$
- (c) $x_0 = -1$ è un punto di minimo locale per f .
- (d) $x_0 = -1$ è un punto di massimo locale per f .
- (e) Esiste un punto $a \in (-1, 0)$ in cui $f''(a) = 0$.