Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 *Secondo compito in itinere – 14 Gennaio 2022*

**Cognome:** ______________________ **Matricola:** ______________________

**Nome:** ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

## Questionario

1. (1 affermazione corretta, 1 punto) Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(x-\sin x)+2\ln\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2(e^x-1)}$$

vale

- (a) $0$ ○
- (b) $-1$ ○
- (c) $1$ ✓
- (d) $-2$ ○
- (e) $2$ ○
- (f) $-\infty$ ○
- (g) $+\infty$ ○

---

2. (1 affermazione corretta, 1 punto) Sia $r$ la retta contenente il punto $Q \equiv (1,2,3)$ e perpendicolare al piano $\pi$ contenente i punti $A \equiv (1,0,0)$, $B \equiv (0,1,0)$ e $C \equiv (0,0,1)$.

- (a) La retta $r$ coincide con l'asse $x$. ○
- (b) La retta $r$ coincide con l'asse $y$. ○
- (c) $r = \{\,(1+t, 2+t, 3+t) \in \mathbb{R}^3 \,:\, t \in \mathbb{R}\,\}$. ✓
- (d) $r = \{\,(1-t, 2+t, 3-t) \in \mathbb{R}^3 \,:\, t \in \mathbb{R}\}$. ○
- (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

3. (2 affermazioni corrette, 2 punti) Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = t^2/2 \end{cases} \qquad t \in [0, \sqrt{3}]\,.$$

- (a) $\gamma$ è chiusa e regolare. ☐
- (b) $\gamma$ è piana. ☑
- (c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{(1+2z)^{3/2}}\,ds = \ln\sqrt{3}$. ☐
- (d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{(1+2z)^{3/2}}\,ds = -\sqrt{3}$. ☐
- (e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{(1+2z)^{3/2}}\,ds = -\ln 2$. ☑

4. (2 affermazioni corrette; 2 punti) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora

(a) se $f$ è continua, allora $f$ è necessariamente integrabile. ☑

(b) se $f$ è integrabile, allora $f$ è necessariamente continua. ☐

(c) se $f$ è integrabile, allora la funzione $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ è continua su $[0,1]$. ☑

(d) se $f$ è integrabile e $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, allora $f$ è identicamente nulla. ☐

(e) se $f$ è continua, allora $f$ non ammette primitiva. ☐

---

5. (1 affermazione corretta, 2 punti) L'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \log(1+4x^2)}{(1+x^3)\,x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) converge per $\alpha > 0$. ○

(b) converge per $\alpha < 3$. ○

(c) converge per $0 < \alpha < 3$. ◯✓

(d) converge per $\alpha > 3$. ○

(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

6. (2 affermazioni corrette, 2 punti) La serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}.$$

(a) è a segni alterni ☑

(b) converge assolutamente e semplicemente ☐

(c) converge assolutamente, ma non semplicemente ☐

(d) converge semplicemente, ma non assolutamente ☑

(e) diverge a $+\infty$ ☐

(f) diverge a $-\infty$ ☐

(g) è indeterminata. ☐

## Esercizio da svolgere (6 punti)

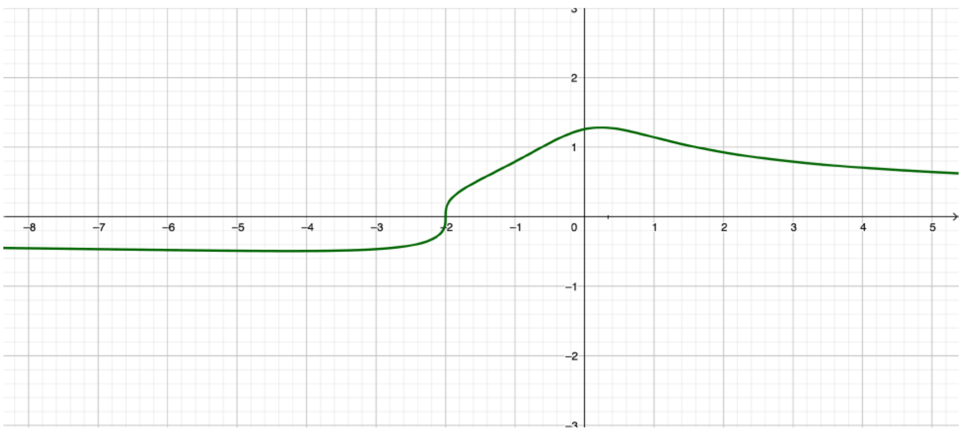
Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x^2+1}}.$$

1. Determinare il dominio, gli eventuali zeri e il segno di $f$.
2. Studiare i limiti al bordo del dominio e determinare gli asintoti di $f$.
3. (a) Calcolare $f'$, determinandone l'insieme di definizione;
   (b) studiare i punti di non derivabilità di $f$;
   (c) studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti estremanti di $f$.
4. Tracciare un grafico probabile della funzione $f$.
   (*Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma il grafico deve essere coerente con le informazioni ottenute nei punti precedenti.*)
5. Calcolare l'integrale
$$I = \int_0^{\sqrt{3}} f(x)^3 \, dx \,.$$

## Risposte

1. Dominio: $\mathbb{R}$. Zeri: $x = -2$. Segno: $f(x) > 0$ per $x > -2$, $f(x) < 0$ per $x < -2$.
2. Limiti al bordo del dominio:
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \,.$$
   Asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$: $y = 0$.
3. (a) Si ha
$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x + 1}{3(x+2)^{2/3}\,(x^2+1)^{4/3}} \qquad x \neq -2 \,.$$
   (b) $f$ non è derivabile in $x = -2$. Si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = +\infty \,.$$
   (c) $f'(x) > 0$ sse $x = -\sqrt{5}-2$ o $-2 < x \leq \sqrt{5}-2$. $f$ ha un minimo in $x_1 = -\sqrt{5}-2$ e ha un massimo in $x_2 = \sqrt{5}-2$.
4. Grafico:




5. $I = \frac{2\pi}{3} + \log(2)$.

## Domande teoriche
(6 punti)

1. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.
2. (1 punti) Enunciare il criterio del rapporto per le serie numeriche.
3. (1 punti) Elencare le possibili posizioni reciproche tra due rette nello spazio.