Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 *Secondo appello – 31 Gennaio 2022*

Cognome: ______________ **Matricola:** ______________

Nome: ______________ **Punteggio Totale:** ______________

Durata: 2 ore e 15 minuti

Questionario

1. (1 risposta corretta, 1 punto) Dato il numero complesso $z = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}+2)^2}$, si ha
   (a) $|z| = 1$ ◯
   (b) $|z| = \mathrm{e}$ ◯
   (c) $\arg z = 0$ ◯
   (d) $\arg z = \frac{\pi}{2}$. ◯
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ◯

---

2. (1 risposta corretta, 2 punti) L'equazione $|z| = z + 1$
   (a) non ammette soluzioni in $\mathbb{C}$ ◯
   (b) ammette almeno due soluzioni in $\mathbb{C}$ ◯
   (c) ammette infinite soluzioni in $\mathbb{C}$ ◯
   (d) ammette almeno una soluzione reale ◯
   (e) ammette almeno una soluzione puramente immaginaria. ◯

---

3. (1 risposta corretta, 1 punto) Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali.
   (a) Se $\{a_n\}_n$ è regolare, allora $\{a_n\}_n$ è convergente. ◯
   (b) Se $\{a_n\}_n$ è regolare, allora $\{a_n\}_n$ è divergente. ◯
   (c) Se $\{a_n\}_n$ è regolare, allora $\{a_n\}_n$ è monotòna. ◯
   (d) Se $\{a_n\}_n$ è positiva, allora $\{a_n\}_n$ è regolare. ◯
   (e) Se $\{a_n\}_n$ è limitata, allora $\{a_n\}_n$ è regolare. ◯
   (f) Se $\{a_n\}_n$ è definitivamente crescente, allora $\{a_n\}_n$ è regolare. ◯

---

4. (1 risposta corretta, 1 punto) Dato il parametro reale $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^{\alpha}}$$

   (a) vale 0 se e solo se $\alpha < 1$ ◯
   (b) vale 0 se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$ ◯
   (c) vale 0 se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$ ◯
   (d) vale 0 per ogni $\alpha > 0$. ◯
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ◯

5. (Più risposte corrette, 2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sin x} - \sin x - 1\,.$$

(a) $f'(x) = e^{\cos x} - \cos x$. ☐
(b) f è illimitata. ☐
(c) $x_0 = 0$ è uno zero di f. ☐
(d) f ammette uno e un solo zero. ☐
(e) f ammette infiniti zeri. ☐

---

6. (1 risposta corretta, 1 punto) La funzione $f(x) = (1 + \sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

(a) è limitata ○
(b) non è monotòna ○
(c) è derivabile in tutto il suo dominio. ○
(d) è derivabile in tutto il suo dominio escluso il punto $x_0 = 0$ ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

7. (1 risposta corretta, 1 punto) Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile 2 volte.

(a) Se f ha concavità rivolta verso l'alto, allora $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$. ○
(b) Se f ha concavità rivolta verso il basso, allora $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. ○
(c) Se $x_0 \in (a, b)$ e $f''(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di flesso per f. ○
(d) Se $x_0 \in (a, b)$ e x_0 è un punto di flesso per f, allora $f''(x_0) = 0$. ○
(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

8. (Più risposte corrette, 2 punti) Sia $P_6(x)$ il polinomio di MacLaurin di ordine 6 della funzione

$$f(x) = (\mathrm{e}^{x^2} - 1 - x^2)\sin(2x).$$

(a) $P_6(x) = x^5$ ☐
(b) $P_6(x) = x^5 + x^6$ ☐
(c) $P_6(x) = x + x^3 + x^5 + x^6$ ☐
(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x^5}{x^5} = 0$ ☐
(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + x^5}{2x^5} = 1$ ☐
(f) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ☐

9. (1 risposta corretta, 2 punti) L'integrale definito

$$I = \int_0^1 \operatorname{artg} x \, \mathrm{d}x$$

vale

(a) $\frac{1}{4}(\pi - \log 2)$ ◯

(b) $\frac{1}{4}(\pi - \log 4)$ ◯

(c) $\frac{1}{2}(\pi - \log 2)$ ◯

(d) $\frac{1}{2}(\pi - \log 4)$. ◯

(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ◯

---

10. (1 risposta corretta, 1 punto) Sia F la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_1^x \frac{t^{500}}{(t+1)^{502}} \, \mathrm{d}t \, .$$

(a) F è definita su tutto $\mathbb{R}$. ◯

(b) F cambia segno in $(1, +\infty)$. ◯

(c) F ha un asintoto verticale in $(1, +\infty)$. ◯

(d) F ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. ◯

(e) F ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. ◯

---

11. (1 risposta corretta, 2 punti) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n!)^\alpha} \sin \frac{1}{n^3}$$

converge

(a) se e solo se $\alpha > 0$ ◯

(b) se e solo se $\alpha \geq 0$ ◯

(c) se e solo se $\alpha > 1$ ◯

(d) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ◯

(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ◯

---

12. (1 risposta corretta, 1 punto) La lunghezza della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos(\log t) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\log t) \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\log t) \end{cases} \qquad t \in \left[1, \mathrm{e}^{2\pi}\right],$$

vale

(a) $+\infty$ ○
(b) 0 ○
(c) $2\pi - 1$ ○
(d) 2π ○
(e) $\mathrm{e}^{2\pi} - 1$ ○

---

13. (1 risposta corretta, 1 punto) Il volume del parallelepipedo generato dai vettori

$$\mathbf{u} = (1, 1, 2), \quad \mathbf{v} = (2, 2, 0), \quad \mathbf{w} = (1, 0, 1),$$

vale

(a) -1 ○
(b) 0 ○
(c) 2 ○
(d) 4 ○
(e) 8 ○

---

14. (Più risposte corrette, 2 punti) Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + 3t. \end{cases}$$

(a) r e s sono sghembe. ☐
(b) r e s sono incidenti. ☐
(c) r e s sono ortogonali. ☐
(d) Il piano di equazione $3x - z = 0$ è parallelo a entrambe le rette. ☐
(e) Il piano di equazione $x + y - z = 0$ è parallelo a una delle due rette. ☐

Cognome e Nome: ____________________________________

ESERCIZIO (6 punti)

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \log(\log x) - \operatorname{artg}(\log x - 1)\,.$$

1. Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.
2. Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (relativi e assoluti).
3. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$, giustificando la risposta.
4. Tracciare un grafico qualitativo di f. (*Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma il grafico deve essere coerente con le informazioni ottenute nei punti precedenti.*)

Cognome e Nome: ______________________________

DOMANDE TEORICHE (6 punti)

1. (1 punto) Dare la definizione di successione monotòna.
2. (1 punto) Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.
3. (4 punti) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.