Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi e Geometria 1 — *Secondo appello – 31 Gennaio 2022*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Durata: 2 ore e 15 minuti

Questionario

1. (1 risposta corretta, 1 punto) Dato il numero complesso $z = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}+2)^2}$, si ha

   (a) $|z| = 1$ ○

   (b) $|z| = \mathrm{e}$ ○

   (c) $\arg z = 0$ ○

   (d) $\arg z = \frac{\pi}{2}$. ○

   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ✓

---

2. (1 risposta corretta, 2 punti) L'equazione $|z| = z + 1$

   (a) non ammette soluzioni in $\mathbb{C}$ ○

   (b) ammette almeno due soluzioni in $\mathbb{C}$ ○

   (c) ammette infinite soluzioni in $\mathbb{C}$ ○

   (d) ammette almeno una soluzione reale ✓

   (e) ammette almeno una soluzione puramente immaginaria. ○

---

3. (1 risposta corretta, 1 punto) Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali.

   (a) Se $\{a_n\}_n$ è regolare, allora $\{a_n\}_n$ è convergente. ○

   (b) Se $\{a_n\}_n$ è regolare, allora $\{a_n\}_n$ è divergente. ○

   (c) Se $\{a_n\}_n$ è regolare, allora $\{a_n\}_n$ è monotòna. ○

   (d) Se $\{a_n\}_n$ è positiva, allora $\{a_n\}_n$ è regolare. ○

   (e) Se $\{a_n\}_n$ è limitata, allora $\{a_n\}_n$ è regolare. ○

   (f) Se $\{a_n\}_n$ è definitivamente crescente, allora $\{a_n\}_n$ è regolare. ✓

---

4. (1 risposta corretta, 1 punto) Dato il parametro reale $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{\alpha}}$$

   (a) vale 0 se e solo se $\alpha < 1$ ○

   (b) vale 0 se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$ ○

   (c) vale 0 se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$ ✓

   (d) vale 0 per ogni $\alpha > 0$. ○

   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

5. (Più risposte corrette, 2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sin x} - \sin x - 1\,.$$

(a) $f'(x) = e^{\cos x} - \cos x$. ☐

(b) f è illimitata. ☐

(c) $x_0 = 0$ è uno zero di f. ☑

(d) f ammette uno e un solo zero. ☐

(e) f ammette infiniti zeri. ☑

---

6. (1 risposta corretta, 1 punto) La funzione $f(x) = (1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

(a) è limitata ○

(b) non è monotòna ○

(c) è derivabile in tutto il suo dominio. ◉

(d) è derivabile in tutto il suo dominio escluso il punto $x_0 = 0$ ○

(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

7. (1 risposta corretta, 1 punto) Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile 2 volte.

(a) Se f ha concavità rivolta verso l'alto, allora $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (a,b)$. ○

(b) Se f ha concavità rivolta verso il basso, allora $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. ○

(c) Se $x_0 \in (a,b)$ e $f''(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di flesso per f. ○

(d) Se $x_0 \in (a,b)$ e x_0 è un punto di flesso per f, allora $f''(x_0) = 0$. ◉

(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

8. (Più risposte corrette, 2 punti) Sia $P_6(x)$ il polinomio di MacLaurin di ordine 6 della funzione

$$f(x) = (\mathrm{e}^{x^2} - 1 - x^2)\sin(2x).$$

(a) $P_6(x) = x^5$ ☑

(b) $P_6(x) = x^5 + x^6$ ☐

(c) $P_6(x) = x + x^3 + x^5 + x^6$ ☐

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x^5}{x^5} = 0$ ☑

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + x^5}{2x^5} = 1$ ☑

(f) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ☐

9. (1 risposta corretta, 2 punti) L'integrale definito

$$I = \int_0^1 \operatorname{artg} x \, \mathrm{d}x$$

vale

(a) $\frac{1}{4}(\pi - \log 2)$ ○

(b) $\frac{1}{4}(\pi - \log 4)$ ✓

(c) $\frac{1}{2}(\pi - \log 2)$ ○

(d) $\frac{1}{2}(\pi - \log 4)$. ○

(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

10. (1 risposta corretta, 1 punto) Sia F la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_1^x \frac{t^{500}}{(t+1)^{502}} \, \mathrm{d}t \, .$$

(a) F è definita su tutto $\mathbb{R}$. ○

(b) F cambia segno in $(1, +\infty)$. ○

(c) F ha un asintoto verticale in $(1, +\infty)$. ○

(d) F ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. ✓

(e) F ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. ○

---

11. (1 risposta corretta, 2 punti) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n!)^\alpha} \sin \frac{1}{n^3}$$

converge

(a) se e solo se $\alpha > 0$ ○

(b) se e solo se $\alpha \geq 0$ ✓

(c) se e solo se $\alpha > 1$ ○

(d) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ○

(e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta. ○

---

12. (1 risposta corretta, 1 punto) La lunghezza della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos(\log t) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\log t) \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\log t) \end{cases} \qquad t \in \left[1, e^{2\pi}\right],$$

vale

(a) $+\infty$ ○
(b) 0 ○
(c) $2\pi - 1$ ○
(d) 2π ✓
(e) $e^{2\pi} - 1$ ○

---

13. (1 risposta corretta, 1 punto) Il volume del parallelepipedo generato dai vettori

$$\mathbf{u} = (1,1,2)\,, \quad \mathbf{v} = (2,2,0)\,, \quad \mathbf{w} = (1,0,1)\,,$$

vale

(a) -1 ○
(b) 0 ○
(c) 2 ○
(d) 4 ✓
(e) 8 ○

---

14. (Più risposte corrette, 2 punti) Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 + 3t\,. \end{cases}$$

(a) r e s sono sghembe. ☐
(b) r e s sono incidenti. ☑
(c) r e s sono ortogonali. ☐
(d) Il piano di equazione $3x - z = 0$ è parallelo a entrambe le rette. ☑
(e) Il piano di equazione $x + y - z = 0$ è parallelo a una delle due rette. ☑

Esercizio (6 punti)

Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \log(\log x) - \operatorname{artg}(\log x - 1)\,.$$

1. Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.
2. Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (relativi e assoluti).
3. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$, giustificando la risposta.
4. Tracciare un grafico qualitativo di f.

Domande teoriche (6 punti)

1. (1 punto) Dare la definizione di successione monotòna.
2. (1 punto) Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.
3. (4 punti) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.