$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(\log x) - \arctan(\log x - 1)\,.$$

(a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e la presenza di eventuali asintoti.

(b) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (relativi e assoluti).

(c) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$, giustificando la risposta.

(d) Tracciare un grafico qualitativo di $f$.

a) L'argomento dei log dev'essere $>0$. Quindi dobbiamo richiedere

$x>0$ e $\log x > 0 \iff x > 1$.

Queste sono soddisfatte per $x>1$. $f$ è continua nel dominio.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \log(0^+) - \arctan(-1) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty - \arctan(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\log(\log x)}{\log x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\log x}{x}}_{\to 0} = 0$$

$\Rightarrow$ $x=1$ è un asintoto verticale (destro). Non ci sono asintoti per $x\to+\infty$.

b) $$f'(x) = \frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{1+(\log x - 1)^2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{1+\log^2 x - 2\log x + 1 - \log x}{\log x\,(1+(\log x-1)^2)}\right] =$$

$$= \frac{\log^2 x - 3\log x + 2}{x\log x\,(1+(\log x - 1)^2)} \qquad \forall\, x>1$$

(non ci sono punti di non-derivabilità)

Il denominatore è sempre $>0$, per $x>1$. Quindi

$f'(x) \geq 0 \iff \log^2 x - 3\log x + 2 \geq 0$

$t^2 - 3t + 2 \geq 0 \iff t_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3\pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

$(t = \log x)$

Quindi $f'(x) \geq 0 \iff \log x \leq 1 \ \vee\ \log x \geq 2$

$\iff x \leq e \ \vee\ x \geq e^2$.

Precisamente $e, e^2$ sono punti critici di $f$, $f$ è crescente per $x \in (1, e)$ e per $x > e^2$, e decrescente in $(e, e^2)$.

Quindi $x = e$ è punto di max locale, e $x = e^2$ è punto di min. locale. Siccome $f(x) \longrightarrow +\infty$ per $x \longrightarrow +\infty$, e $f(x) \longrightarrow -\infty$ per $x \longrightarrow 1^+$, allora non sono punti di max/min assoluti.

c) $f(e) = \log(1) - \arctan(1-1) = 0$ è uno 0 di $f$.

$$\left.\begin{array}{l} f(e^2) < 0, \text{ per monotonia} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{per il teo di esistenza,} \\ \text{esiste uno 0 di } f \text{ in } (2, +\infty)\end{array}$$

Per monotonia, questi sono gli unici 0 di $f$

d)