Analisi e Geometria 1 — *Secondo appello* – 15 Giugno 2022

**Cognome e Nome:** ____________________

**Codice Persona:** ____________ **Punteggio Totale:** ____________

**Istruzioni.** *Segare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

**Tempo.** *2 ore e 15 minuti.*

## Questionario (20 punti, soglia sufficienza 10)

**Quesito 1.** (1 risposta corretta, 1 punto)
Sia $a_n = \ln\left(\frac{n^2+7}{n^2+n}\right)$ per $n \geq 1$, e sia $A = \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Allora:

- (A) la successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ è strettamente crescente
- (B) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 0$
- (C) l'insieme $A$ ammette estremo inferiore, ma non minimo
- (D) l'insieme $A$ ammette estremo superiore, ma non massimo
- ✓ (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

**Quesito 2.** (1 risposta corretta, 1 punto)
Si considerino gli insiemi

$$A = \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, 1 \leq |z| \leq 2, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}\right\}$$
$$B = \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z \leq 0\,,\ \operatorname{Im} z \geq 0\right\}$$

nel piano di Gauss. Allora:

- (A) Se $z \in A$, allora $\overline{z} \in B$
- ✓ (B) Se $z \in A$, allora $\mathrm{i}z \in B$
- (C) L'intersezione $A \cap \{\mathrm{i}z \,:\, z \in B\}$ non è vuota
- (D) L'intersezione $A \cap \{\overline{z} \,:\, z \in B\}$ non è vuota
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

**Quesito 3.** (1 risposta corretta, 2 punti)
Si consideri l'equazione $z^4 = z\,(-4\sqrt{3} + 4\mathrm{i})$ in $\mathbb{C}$. Allora:

- (A) Se $w$ è una soluzione, allora anche $w\,\mathrm{i}$ è una soluzione
- ✓ (B) Se $w$ è una soluzione, allora anche $w\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ è una soluzione
- (C) Tutte le soluzioni giacciono su una circonferenza centrata nell'origine
- (D) $2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}$ è una soluzione
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

**Quesito 4.** (1 risposta corretta, 1 punto)
Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^5)}{3x^2 \sin(x^3)}$$

- (A) vale 1
- (B) vale $\frac{1}{2}$
- ✓ (C) vale $\frac{1}{3}$
- (D) non esiste in $\mathbb{R}$
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

**Quesito 5.** (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(2 + \operatorname{artg} x)$. Allora:

- [A] $f$ è sempre positiva
- ✓ [B] $f$ ammette uno e un solo zero
- [C] $f$ ammette almeno due zeri
- [D] $f$ non ammette alcun asintoto (orizzontale, obliquo o verticale)
- ✓ [E] $f$ ammette almeno un asintoto (orizzontale, obliquo o verticale).

**Quesito 6.** (1 risposta corretta, 2 punti)
Sia $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$. Allora:

- (A) Esiste al massimo un $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$
- ✓ (B) Esiste almeno un $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$
- (C) $f$ non può essere costante
- (D) I limiti $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f'(x)$ esistono necessariamente in $\mathbb{R}$
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

**Quesito 7.** (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{artg}(x^2) \cos \frac{1}{x^3} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora:

- [A] $f$ non è continua in $x = 0$
- [B] $f$ è continua ma non derivabile in $x = 0$
- ✓ [C] $f$ è derivabile in $x = 0$
- [D] Per $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^4} \cos \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{3x^2} \sin \dfrac{1}{x^3} \operatorname{artg} x$
- ✓ [E] Per $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{3}{x^4} \sin \dfrac{1}{x^3} \operatorname{artg}(x^2) + \dfrac{2x}{1+x^4} \cos \dfrac{1}{x^3}$.

**Quesito 8.** (1 risposta corretta, 1 punto)
Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \cos(\sqrt{2}x) + e^{x^2} - 2$$

si ha

- Ⓐ $f(x) = o(x^4)$ per $x \to 0$
- Ⓑ $f(x) \sim x^2$ per $x \to 0$
- Ⓒ $f(x) \sim x^4$ per $x \to 0$
- Ⓓ $f(x) \sim x^6$ per $x \to 0$
- ✓ Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

**Quesito 9.** (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin(1-x)}{x^\alpha - x^{\alpha+2}} \, dx$$

dipendente da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora:

- Ⓐ L'integrale converge se e solo se $\alpha < 2$
- ✓ Ⓑ L'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$
- Ⓒ L'integrale converge se e solo se $\alpha < 0$
- Ⓓ L'integrale non converge per alcun valore di $\alpha$
- Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

**Quesito 10.** (2 risposte corrette, 2 punti)
Data una funzione continua $f \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, si consideri la funzione integrale $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) \, dt$. Allora:

- ✓ [A] $F$ è crescente, ma non necessariamente strettamente crescente
- [B] $F$ è necessariamente strettamente crescente
- [C] $F$ ammette necessariamente un punto estremante
- ✓ [D] $F$ potrebbe essere costante su $\mathbb{R}$.

**Quesito 11.** (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ dipendente da un parametro $\alpha \in (0, +\infty)$. Allora:

- Ⓐ La serie converge se e solo se $\alpha > 2$
- Ⓑ La serie converge se e solo se $\alpha > 1$
- Ⓒ Nulla si può dire sulla convergenza se $\alpha \in (0, 1]$
- ✓ Ⓓ La serie converge per ogni $\alpha$
- Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

**Quesito 12.** (1 risposta corretta, 2 punti)
Si consideri il piano $\pi : 2x + y - 2z - 2 = 0$ e il punto $A \equiv (3, -1, 2)$. Allora:

- (A) $A$ giace sul piano $\pi$
- ✓ (B) La distanza $d(A, \pi)$ è $\frac{1}{3}$
- (C) La distanza $d(A, \pi)$ è $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- (D) La distanza $d(A, \pi)$ è 1
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

**Quesito 13.** (1 risposta corretta, 1 punto)
Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ tre vettori di $\mathbb{R}^3$. Allora:

- (A) Se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, allora $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono necessariamente linearmente indipendenti
- (B) Se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{w}$
- (C) Se $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$, allora $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono necessariamente linearmente dipendenti
- ✓ (D) Se $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$, allora $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono necessariamente linearmente dipendenti
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

**Quesito 14.** (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}}{3} t\sqrt{t} \\ y = t \sin t \\ z = t \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi].$$

Allora:

- (A) Esiste un $t_0 \in [0, \pi]$ per il quale la curva non è regolare in $t_0$
- (B) La curva non è rettificabile
- (C) La lunghezza della curva è $\pi(\pi + 2)$
- ✓ (D) La lunghezza della curva è $\frac{\pi(\pi+2)}{2}$
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

## Esercizio carta e penna (6 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-|x|}}{1+x^3}$$

(1) Determinare il dominio, gli eventuali zeri e il segno della funzione $f$.

(2) Studiare i limiti al bordo del dominio e determinare gli eventuali asintoti.

(3) Calcolare $f'$ determinandone l'insieme di definizione, studiare i punti di non derivabilità.

(4) Studiare la monotonia e determinare il numero di punti estremanti, eventualmente usando il teorema degli zeri. Determinare i punti di massimo e minimo locale e globale.

(5) Tracciare un grafico probabile della funzione $f$. Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma à richiesto che il grafico tracciato sia coerente con tutte le informazioni ottenibili a prescindere dalla derivata seconda.

## Teoria (6 punti)

(1) Dare la definizione di funzione integrale.

(2) Enunciare e dimostrare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.