Terzo appello: studio di funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-|x|}}{1+x^3}$$

(1) Dominio, zeri, segno

- $1+x^3 = 0 \iff x=-1$
  $1-|x| < 0 \iff x \notin [-1,1]$
  $\Bigg\} \Rightarrow$ Dominio: $(-1,1]$

- $f(x) = 0 \iff \sqrt{1-|x|} = 0 \iff 1-|x| = 0 \iff x = +1$
  perchè $-1 \notin (-1,1]$

- Per $x \in (-1,1]$: $\sqrt{1-|x|} \geq 0$ e anche $1+x^2 \geq 0$
  $\Rightarrow f(x) \geq 0$.

(2) Limiti al bordo e asintoti

da studiare solo $\lim_{x\to -1^+} f(x)$:

Per $x \leq 0$: $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-(-x)}}{1+x^3} = \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)\underbrace{(x^2-x+1)}_{>0}} \longrightarrow +\infty$ per $x \to -1^+$

Altro metodo con de l'Hospital:
$$\frac{\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{3x^2} = \frac{1}{6\cdot\sqrt{1+x}\cdot x^2} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } x\to -1^+$$

Allora: asintoto verticale $x=-1$.

(3) Per $x \in (-1,0) \cup (0,1)$, f è composta di funzioni derivabile, allora derivabile in $(-1,0)\cup(0,1)$.

- Per $0<x<1$: $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{1+x^3}$

$$\leadsto f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\cdot(1+x^3) - (1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot 3x^2}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{-1-x^3 - 6x^2\cdot(1-x)}{2\cdot\sqrt{1-x}\cdot(1+x^3)^2} = \frac{5x^3-6x^2-1}{2\sqrt{1-x}\,(1+x^3)^2}$$

Per $-1<x<0$: $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{1+x^3}$

$$\rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+x^3) - (1+x)^{\frac{1}{2}}\cdot 3x^2}{(1+x^3)^2} =$$

$$= \frac{1+x^3-(1+x)\cdot 6x^2}{2\cdot\sqrt{1+x}\,(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{-5x^3-6x^2+1}{2\sqrt{1+x}\,(1+x^3)^2} = -\frac{5x^3+6x^2-1}{2\sqrt{1+x}\,(1+x^3)^2}$$

- Per $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 5x^3-6x-1 = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -5x^3-6x^2+1 = +1$$

$\Rightarrow \quad x=0 \quad$ punto angoloso

- Per $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{5x^3-6x^2-1}^{\to -2}}{2\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\to 0^+}\underbrace{(1+x^3)^2}_{\to 4}} = -\infty$$

$\Rightarrow \quad x=1 \quad$ punto con tangente verticale

(4) Monotonia e punti estremanti

- Per $0<x<1$: $\quad f'(x) = \dfrac{5x^3-6x^2-1}{2\underbrace{\sqrt{1-x}}_{>0}\,\underbrace{(1+x^3)^2}_{>0}} < 0 \iff$

$$\iff \quad 5x^3-6x^2-1<0$$

Per $0<x<1$: $\quad x^3<x^2 \quad$ allora

$$5x^3-6x^2-1 < 5x^2-6x^2-1 = -x^2-1 < 0$$

$\Rightarrow f$ strettamente decrescente per $x\in(0,1)$.

- Per $-1<x<0$: $\quad f'(x) = -\dfrac{5x^3+6x^2-1}{\underbrace{2\sqrt{1+x}\,(1+x^3)^2}_{>0}} > 0 \iff$

$$\iff -5x^3-6x^2+1>0.$$

Per $x=-1$: $\quad -5\cdot(-1)^3-6\cdot(-1)^2+1 = 0$

$x=0$: $\quad -5\cdot 0^3 - 6\cdot 0^2 + 1 > 0$

$\Rightarrow$ almeno uno zero

Monotonia di $f'(x)$:

$$\left(-5x^3-6x^2+1\right)' = -15x^2-12x = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ oppure } x=-\frac{12}{15}=-\frac{4}{5} \in (-1,0)$$

Allora $f'(x)$ decrescente per $x\in\left(-1,-\frac{4}{5}\right)$

crescente per $x\in\left(-\frac{4}{5},0\right)$

$\Rightarrow$ esiste un unico zero in $\left(-\frac{4}{5},0\right)$.

Altro metodo:

$$-5x^3-6x^2+1 = -(x+1)\cdot(5x^2+x-1)$$

$$5x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{10}$$

$\frac{-1+\sqrt{21}}{10}>0$ non incluso in $(-1,0)$

$\frac{-1-\sqrt{21}}{10}>-1 \Leftrightarrow -1-\sqrt{21}>-10 \Leftrightarrow 9>\sqrt{21}$ ✓

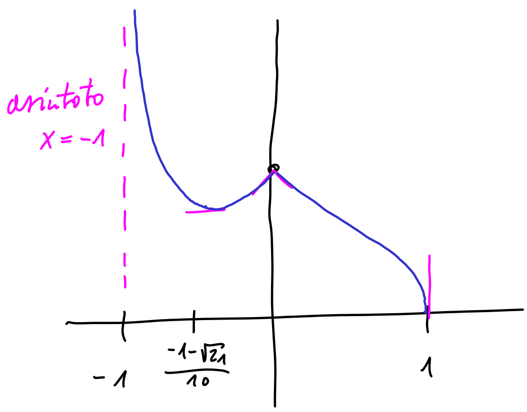
$\Rightarrow f'(x)=0$ per $x\in(-1,0) \Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{21}}{10}\approx -0{,}558\ldots$

- Punti di massimo/minimo locale globale:

$x=\frac{-1-\sqrt{21}}{10}$ minimo locale, $x=1$ minimo globale ($f(x)\geq 0$)

$x=0$ massimo locale (crescente prima di $x=0$, decrescente dopo di $x=0$), $\nexists$ massimo globale ($\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$)

(5)



$f(0)=1$

Opzionale:

(6) $$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-|x|}}{1+x^3}\, dx$$ integrale improprio per $x=-1$.

Studiamo la parte per $x \leq 0$:

$$\int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{1+x}}{1+x^3}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)\underbrace{(x^2-x+1)}_{\neq 0}}\, dx = +\infty$$

$$= \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

Allora l'integrale converge.