Politecnico di Milano – Ingegneria Aerospaziale/Energetica/Meccanica

Analisi e Geometria 1 — Terzo appello – 11 Luglio 2022

Cognome e Nome: ____________________

Codice Persona: ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

Istruzioni. *Segare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (20 punti, soglia sufficienza 10)

Quesito 1. (1 risposta corretta, 1 punto)
Sia $A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 3\}$. Allora:

- (A) A ha massimo e minimo in $\mathbb{R}$.
- (B) A ha estremo superiore in $\mathbb{R}$ ma non ha massimo.
- (C) A non ha estremo inferiore in $\mathbb{R}$.
- (D) A non è limitato in $\mathbb{R}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 2. (1 risposta corretta, 2 punti)
Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + |z|| = |z - |z||\}$. Allora:

- (A) $A = \varnothing$.
- (B) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$.
- (C) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$.
- (D) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 3. (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri l'equazione $|z^4| + 1 - 2\bar{z}^2 = 0$ in $\mathbb{C}$. Allora:

- (A) L'equazione ha 4 radici distinte.
- (B) L'equazione ha soltanto 2 radici reali.
- (C) L'equazione ha soltanto 2 radici puramente immaginarie.
- (D) L'equazione ha soltanto 2 radici complesse coniugate.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 4. (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri il limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}-\frac{x}{\sin(x)}\right).$$

Allora:

- (A) Il limite non esiste.
- (B) Il limite vale 0.
- (C) Il limite vale 1.
- (D) Il limite vale $+\infty$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 5. (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=|x|\mathrm{e}^{-1/x}$. Allora:

- [A] f è pari.
- [B] f è limitata.
- [C] f ha un asintoto verticale.
- [D] f ha due asintoti obliqui.
- [E] f non ammette alcun asintoto (orizzontale, obliquo o verticale).

Quesito 6. (1 risposta corretta, 2 punti)
Sia $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ continua in $[0,1]$, derivabile in $(0,1)$ e tale che $f(0)=0$ e $f(1)=1$. Allora

- (A) esiste al massimo un $c\in(0,1)$ tale che $f'(c)=1$
- (B) esiste almeno un $c\in(0,1)$ tale che $f'(c)=1$
- (C) esiste uno ed un solo $c\in(0,1)$ tale che $f'(c)=1$
- (D) f' non si può annullare
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 7. (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f_\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}|x|^\alpha\sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}\qquad \text{dove } \alpha>0.$$

Allora:

- [A] f_α è sempre continua in $x=0$.
- [B] f_α non è mai derivabile in $x=0$.
- [C] f_α è derivabile in $x=0$ se e solo se $\alpha>1$.
- [D] f_α è derivabile in $x=0$ se e solo se $\alpha>2$

Quesito 8. (1 risposta corretta, 1 punto)
La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = (1+x)e^x - (1-x)\cos(x) - x(1+x)^{1/3}$$

è tale che, per $x \to 0$,

- (A) $f(x) = o(x)$.
- (B) $f(x) \sim x$.
- (C) $f(x) \sim x^2$.
- (D) $f(x) \sim x^4$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 9. (1 risposta corretta, 1 punto)
Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabile e sia

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$

Allora

- (A) f è non-negativa
- (B) esiste sempre almeno un $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 1$
- (C) se f è continua in $[0,1]$, allora esiste un unico $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 1$
- (D) se f è continua in $[0,1]$, allora esiste almeno un $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 1$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 10. (2 riposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \sin t \, \mathrm{d}t$. Allora

- [A] F è dispari
- [B] F è monotòna
- [C] F ha un asintoto orizzontale
- [D] F ammette infiniti punti estremanti.

Quesito 11. (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3n^2+2}{n^4+5n^2} \sin n$. Allora:

- (A) La serie è a segni alterni.
- (B) La serie converge assolutamente.
- (C) La serie converge semplicemente, ma non assolutamente.
- (D) La serie diverge a $+\infty$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 12. (1 risposta corretta, 1 punto)
L'equazione cartesiana del piano passante per $A \equiv (1, -2, 1)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (-1, 0, 2)$ è

- (A) $2x - 3y + z - 9 = 0$.
- (B) $2x + 3y + z - 9 = 0$.
- (C) $2x - 3y - z - 9 = 0$.
- (D) $2x + 3y + z + 9 = 0$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 13. (1 risposta corretta, 1 punto)
Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori in $\mathbb{R}^3$ tali che $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 3$. Allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ vale

- (A) 0.
- (B) 1.
- (C) 2.
- (D) 3.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 14. (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi].$$

Allora

- [A] la curva è chiusa
- [B] la curva è regolare
- [C] la curva possiede un punto non regolare
- [D] $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{2y - y^2}\, \mathrm{d}s = \frac{8}{3}$

Esercizio carta e penna (6 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^x(1 - \mathrm{e}^{-x})^{1/3}.$$

(1) Determinare il dominio, gli eventuali zeri ed il segno della funzione f.
(2) Studiare i limiti al bordo del dominio e determinare gli eventuali asintoti.
(3) Calcolare f' determinandone l'insieme di definizione, studiare i punti di non derivabilità.
(4) Studiare la monotonia di f, determinare i punti estremanti e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e globale.
(5) Calcolare f'' determinandone l'insieme di definizione.
(6) Studiare la convessità di f, determinando gli eventuali punti di flesso.
(7) Tracciare un grafico della funzione f coerente con tutte le informazioni ricavate nei punti precedenti.

Teoria (6 punti)

(1) Dare la definizione geometrica della distanza di un punto da una retta nello spazio.

(2) Enunciare e dimostrare il teorema che dà la formula della distanza di un punto $P \equiv (x_0, y_0, z_0)$ da un piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ dello spazio.