

Cognome e Nome: _____

Codice Persona: _____ Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 2 ore e 15 minuti.

Questionario (20 punti, soglia sufficienza 10)

Quesito 1. (1 risposta corretta, 1 punto)

Sia $A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 3\}$. Allora:

- (A) A ha massimo e minimo in \mathbb{R} .
- ✓ (B) A ha estremo superiore in \mathbb{R} ma non ha massimo.
- (C) A non ha estremo inferiore in \mathbb{R} .
- (D) A non è limitato in \mathbb{R} .
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 2. (1 risposta corretta, 2 punti)

Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + |z|| = |z - |z||\}$. Allora:

- (A) $A = \emptyset$.
- (B) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$.
- ✓ (C) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$.
- (D) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 3. (1 risposta corretta, 1 punto)

Si consideri l'equazione $|z^4| + 1 - 2\bar{z}^2 = 0$ in \mathbb{C} . Allora:

- (A) L'equazione ha 4 radici distinte.
- ✓ (B) L'equazione ha soltanto 2 radici reali.
- (C) L'equazione ha soltanto 2 radici puramente immaginarie.
- (D) L'equazione ha soltanto 2 radici complesse coniugate.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 4. (1 risposta corretta, 1 punto)

Si consideri il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{x}{\sin(x)} \right).$$

Allora:

- (A) Il limite non esiste.
- ✓ (B) Il limite vale 0.
- (C) Il limite vale 1.
- (D) Il limite vale $+\infty$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 5. (2 risposte corrette, 2 punti)

Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|e^{-1/x}$. Allora:

- (A) f è pari.
- (B) f è limitata.
- ✓ (C) f ha un asintoto verticale.
- ✓ (D) f ha due asintoti obliqui.
- (E) f non ammette alcun asintoto (orizzontale, obliquo o verticale).

Quesito 6. (1 risposta corretta, 2 punti)

Sia $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[0, 1]$, derivabile in $(0, 1)$ e tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Allora

- (A) esiste al massimo un $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = 1$
- ✓ (B) esiste almeno un $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = 1$
- (C) esiste uno ed un solo $c \in (0, 1)$ tale che $f'(c) = 1$
- (D) f' non si può annullare
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 7. (2 risposte corrette, 2 punti)

Si consideri la funzione $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{dove } \alpha > 0.$$

Allora:

- ✓ (A) f_α è sempre continua in $x = 0$.
- (B) f_α non è mai derivabile in $x = 0$.
- ✓ (C) f_α è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 1$.
- (D) f_α è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 2$

Quesito 8. (1 risposta corretta, 1 punto)

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = (1+x)e^x - (1-x)\cos(x) - x(1+x)^{1/3}$$

è tale che, per $x \rightarrow 0$,

- (A) $f(x) = o(x)$.
- (B) $f(x) \sim x$.
- (C) $f(x) \sim x^2$.
- (D) $f(x) \sim x^4$.
- ✓ (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 9. (1 risposta corretta, 1 punto)

Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile e sia

$$\int_0^1 f(x) dx = 1.$$

Allora

- (A) f è non-negativa
- (B) esiste sempre almeno un $x \in [0, 1]$ tale che $f(x) = 1$
- (C) se f è continua in $[0, 1]$, allora esiste un unico $x \in [0, 1]$ tale che $f(x) = 1$
- ✓ (D) se f è continua in $[0, 1]$, allora esiste almeno un $x \in [0, 1]$ tale che $f(x) = 1$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 10. (2 risposte corrette, 2 punti)

Si consideri la funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \sin t dt$. Allora

- (A) F è dispari
- (B) F è monotona
- ✓ (C) F ha un asintoto orizzontale
- ✓ (D) F ammette infiniti punti estremanti.

Quesito 11. (1 risposta corretta, 1 punto)

Si consideri la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{3n^2 + 2}{n^4 + 5n^2} \sin n$. Allora:

- (A) La serie è a segni alterni.
- ✓ (B) La serie converge assolutamente.
- (C) La serie converge semplicemente, ma non assolutamente.
- (D) La serie diverge a $+\infty$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 12. (1 risposta corretta, 1 punto)

L'equazione cartesiana del piano passante per $A \equiv (1, -2, 1)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (-1, 0, 2)$ è

- ✓ (A) $2x - 3y + z - 9 = 0$.
- (B) $2x + 3y + z - 9 = 0$.
- (C) $2x - 3y - z - 9 = 0$.
- (D) $2x + 3y + z + 9 = 0$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 13. (1 risposta corretta, 1 punto)

Siano \mathbf{u} e \mathbf{v} due vettori in \mathbb{R}^3 tali che $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 3$. Allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ vale

- (A) 0.
- ✓ (B) 1.
- (C) 2.
- (D) 3.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Quesito 14. (2 risposte corrette, 2 punti)

Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

Allora

- (A) la curva è chiusa
- (B) la curva è regolare
- ✓ (C) la curva possiede un punto non regolare
- ✓ (D) $\int_{\gamma} \sqrt{2y - y^2} \, ds = \frac{8}{3}$

Esercizio carta e penna (6 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x(1 - e^{-x})^{1/3}.$$

- (1) Determinare il dominio, gli eventuali zeri ed il segno della funzione f .
- (2) Studiare i limiti al bordo del dominio e determinare gli eventuali asintoti.
- (3) Calcolare f' determinandone l'insieme di definizione, studiare i punti di non derivabilità.
- (4) Studiare la monotonia di f , determinare i punti estremanti e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e globale.
- (5) Calcolare f'' determinandone l'insieme di definizione.
- (6) Studiare la convessità di f , determinando gli eventuali punti di flesso.
- (7) Tracciare un grafico della funzione f coerente con tutte le informazioni ricavate nei punti precedenti.

Teoria (6 punti)

- (1) Dare la definizione geometrica della distanza di un punto da una retta nello spazio.
- (2) Enunciare e dimostrare il teorema che dà la formula della distanza di un punto $P \equiv (x_0, y_0, z_0)$ da un piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ dello spazio.

