ESERCIZIO CARTA E PENNA

11/7/22

$$f(x) = e^x \sqrt[3]{1-e^{-x}}$$

(1) È CHIARO CHE

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad f(x) > 0 \iff x > 0$$

INOLTRE

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{e^{3x} - e^{2x}} = 0$$

DUNQUE $y = 0$ È ASINTOTO ORIZZONTALE

$f(x) \sim e^x$ PER $x \to +\infty$

DUNQUE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

E NON CI SONO ASINTOTI OBCLIQUI

(2) f È COMPOSIZIONE DI FUNZIONI DERIVABILI IN $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ DUNQUE È DERIVABILE IN $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ E RISULTA

$$f'(x) = \frac{3e^x - 2}{3\sqrt[3]{(1-e^{-x})^2}}$$

OSSERVIAMO CHE

$$f'(x) = 0 \iff x = \ln \frac{2}{3}$$

$$f'(x) \lessgtr 0 \iff x \lessgtr \ln \frac{2}{3}$$

DUNQUE $\left(\ln \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$

È UN PUNTO DI MINIMO

GLOBALE

(3) IN $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ f È ANCHE 2 VOLTE

DERIVABILE E RISULTA

$$f''(x) = \frac{9e^{2x} - 15e^{x} + 4}{9e^{x}\sqrt[3]{(1-e^{-x})^5}}$$

QUINDI

$$f''(x)=0 \iff e^x = \begin{cases} 1/3 \\ 4/3 \end{cases}$$

$$\iff (x=-\ln 3) \vee \left(x=\ln \frac{4}{3}\right)$$

f'' HA IL SEGNO DI

$$(1-e^{-x})(9e^{2x}-15e^x+4)$$

PERCIÒ

$$\begin{cases} f''(x)<0 \iff (x<-\ln 3) \vee \left(0<x<\ln \frac{4}{3}\right) \\ f''(x)>0 \iff (-\ln 3<x<0) \vee \left(x>\ln \frac{4}{3}\right) \end{cases}$$

RIASSUMENDO

$\left(-\ln 3, -\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ PUNTO DI FLESSO (ASCENDENTE)

$\left(\ln \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$ PUNTO DI FLESSO (DISCENDENTE)

INOLTRE, ESSENDO

$$f'(x) \sim \frac{1}{3x^{2/3}} \qquad x \to 0$$

SI HA CHE $(0,0)$ È UN PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE

(4)