Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 — *Quarto Appello – 7 Settembre 2022*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (20 punti, soglia sufficienza 10)

1. (1 risposta corretta, 1 punto) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) = z^2$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora

   ① tutti gli elementi del codominio hanno esattamente 2 controimmagini
   ② almeno un elemento del codominio ha 4 controimmagini
   ③ almeno un elemento del codominio ha infinite controimmagini
   ④ f è iniettiva
   ⑤ f è suriettiva.

2. (1 risposta corretta, 2 punti) Sia $z = \dfrac{(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^9}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^6}$. Allora:

   ① $z - 2\overline{z} = 1$ ③ $z - \overline{z} = |z|$ ⑤ $\arg z + \arg \overline{z} = \pi/2$
   ② $2z - \overline{z} = 7$ ④ $z + \overline{z} = 2|z|$ ⑥ $\arg z + \arg \overline{z} = \pi$.

3. (1 risposta corretta, 1 punto) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Allora

   ① se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente
   ② se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente
   ③ se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata
   ④ se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare
   ⑤ se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare
   ⑥ se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente decrescente, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare.

4. (1 risposta corretta, 1 punto) Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\log(1+x)}{x} - \frac{x}{\log(1+x)}\right)$$

   ① non esiste ③ vale 1 ⑤ vale $+\infty$
   ② vale 0 ④ vale -1 ⑥ vale $-\infty$.

5. (2 risposte corrette, 2 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$. Allora

   [1] f è pari
   [2] f è illimitata
   [3] f possiede infiniti zeri
   [4] f possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$
   [5] $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2 - \cos^2 x}$.

6. (1 risposta corretta, 2 punti) Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$ e $f(1) = -1$. Allora

   (1) esiste almeno un $x_0 \in (-1, 0)$ tale che $f'(x_0) = 0$
   (2) esiste almeno un $x_0 \in (0, 1)$ tale che $f'(x_0) = 0$
   (3) esiste almeno un $x_0 \in (-1, 1)$ tale che $f'(x_0) = 0$
   (4) f' non si annulla mai
   (5) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

7. (2 risposte corrette, 2 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   Allora

   [1] f è continua in $x_0 = 0$
   [2] f non è derivabile in $x_0 = 0$
   [3] f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = -1$
   [4] f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 1$
   [5] f è di classe $\mathcal{C}^1$.

8. (2 risposte corrette, 2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile quattro volte in $x_0 = 0$ tale che

$$f(x) = 1 - \frac{x^3}{3} + x^4 + o(x^4) \qquad x \to 0.$$

   Allora

   [1] f possiede un punto di massimo in $x_0 = 0$
   [2] f possiede un punto di minimo in $x_0 = 0$
   [3] f possiede un punto di flesso in $x_0 = 0$
   [4] $f^{(3)}(0) = -2$
   [5] $f^{(4)}(0) = 1$.

9. (1 risposta corretta, 1 punto) L'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{1+4x^2} \, dx$$

   (1) converge e vale 0
   (2) converge e vale $\frac{\pi}{4}$
   (3) converge e vale $\frac{\pi^2}{4}$
   (4) converge e vale $\frac{\pi^2}{8}$
   (5) converge e vale $\frac{\pi^2}{16}$
   (6) non converge.

10. (1 riposta corretta, 1 punto) Si consideri la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+t^2} \, dt \, .$$

   Allora

   (1) F è pari
   (2) F è strettamente monotòna
   (3) F non possiede asintoti orizzontali
   (4) F ammette infiniti punti estremanti
   (5) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

11. (1 risposta corretta, 1 punto) La serie $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

(1) converge assolutamente
(2) converge semplicemente, ma non assolutamente
(3) diverge a $+\infty$
(4) diverge a $-\infty$
(5) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

12. (2 risposte corrette, 2 punti) Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori ortogonali di $\mathbb{R}^3$. Allora

[1] $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$
[2] $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$
[3] $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$
[4] $\|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$
[5] una sola delle altre affermazioni è corretta.

13. (1 risposta corretta, 1 punto) Le due rette

$$r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 4-t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-t \\ z = 2+t \end{cases}$$

(1) sono coincidenti
(2) sono parallele, ma non coincidenti
(3) sono incidenti in un punto
(4) sono sghembe
(5) sono ortogonali.

14. (1 risposta corretta, 1 punto) Si consideri l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma \sqrt{x^2+y^2+4z}\,\mathrm{d}s \qquad \text{dove} \qquad \gamma : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

Allora

(1) $I = -1$
(2) $I = 0$
(3) $I = 1$
(4) $I = \frac{8}{3}$
(5) $I = \frac{16}{3}$
(6) $I = \frac{18}{3}$.

Esercizio carta e penna (6 punti)

Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x.$$

1. Determinare il dominio e le eventuali simmetrie della funzione f. Inoltre, studiare i limiti al bordo del dominio e determinare gli eventuali asintoti.
2. Calcolare f' determinandone l'insieme di definizione.
3. Studiare la monotonia di f e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locale e globale.
4. Calcolare f'' determinandone l'insieme di definizione.
5. Studiare la cocavità di f e determinare gli eventuali punti di flesso.
6. Tracciare il grafico qualitativo della funzione f.

Teoria (6 punti)

1. Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.
2. Enunciare e dimostrare il teorema di monotonia per le funzioni derivabili.