ANALISI E GEOMETRIA 1 *Quarto Appello – 7 Settembre 2022*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 15 minuti.*

QUESTIONARIO (20 punti, soglia sufficienza 10)

1. (1 risposta corretta, 1 punto) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) = z^2$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora

   ① tutti gli elementi del codominio hanno esattamente 2 controimmagini
   ② almeno un elemento del codominio ha 4 controimmagini
   ③ almeno un elemento del codominio ha infinite controimmagini
   ④ f è iniettiva
   ⑤ ✓ f è suriettiva.

2. (1 risposta corretta, 2 punti) Sia $z = \dfrac{(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^9}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^6}$. Allora:

   ① $z - 2\overline{z} = 1$
   ② $2z - \overline{z} = 7$
   ③ $z - \overline{z} = |z|$
   ④ ✓ $z + \overline{z} = 2|z|$
   ⑤ $\arg z + \arg \overline{z} = \pi/2$
   ⑥ $\arg z + \arg \overline{z} = \pi$.

3. (1 risposta corretta, 1 punto) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Allora

   ① se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente
   ② se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente
   ③ se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata
   ④ se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare
   ⑤ se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare
   ⑥ ✓ se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente decrescente, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare.

4. (1 risposta corretta, 1 punto) Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\log(1+x)}{x} - \frac{x}{\log(1+x)}\right)$$

   ① non esiste
   ② vale 0
   ③ vale 1
   ④ ✓ vale -1
   ⑤ vale $+\infty$
   ⑥ vale $-\infty$.

5. (2 risposte corrette, 2 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$. Allora

   [1] f è pari
   [2] f è illimitata
   [3] ✓ f possiede infiniti zeri
   [4] f possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$
   [5] ✓ $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2 - \cos^2 x}$.

6. (1 risposta corretta, 2 punti) Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$ e $f(1) = -1$. Allora

① esiste almeno un $x_0 \in (-1, 0)$ tale che $f'(x_0) = 0$

② esiste almeno un $x_0 \in (0, 1)$ tale che $f'(x_0) = 0$

③ esiste almeno un $x_0 \in (-1, 1)$ tale che $f'(x_0) = 0$

④ f' non si annulla mai

⑤ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

7. (2 risposte corrette, 2 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora

[1] f è continua in $x_0 = 0$

[2] f non è derivabile in $x_0 = 0$

[3] f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = -1$

[4] f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 1$

[5] f è di classe $\mathcal{C}^1$.

8. (2 risposte corrette, 2 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile quattro volte in $x_0 = 0$ tale che

$$f(x) = 1 - \frac{x^3}{3} + x^4 + o(x^4) \qquad x \to 0.$$

Allora

[1] f possiede un punto di massimo in $x_0 = 0$

[2] f possiede un punto di minimo in $x_0 = 0$

[3] f possiede un punto di flesso in $x_0 = 0$

[4] $f^{(3)}(0) = -2$

[5] $f^{(4)}(0) = 1$.

9. (1 risposta corretta, 1 punto) L'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{1 + 4x^2} \, \mathrm{d}x$$

① converge e vale 0

② converge e vale $\dfrac{\pi}{4}$

③ converge e vale $\dfrac{\pi^2}{4}$

④ converge e vale $\dfrac{\pi^2}{8}$

⑤ converge e vale $\dfrac{\pi^2}{16}$

⑥ non converge.

10. (1 riposta corretta, 1 punto) Si consideri la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1 + t^2} \, \mathrm{d}t\,.$$

Allora

① F è pari

② F è strettamente monotòna

③ F non possiede asintoti orizzontali

④ F ammette infiniti punti estremanti

⑤ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

11. (1 risposta corretta, 1 punto) La serie $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

   ① converge assolutamente
   ② converge semplicemente, ma non assolutamente
   ③ diverge a $+\infty$
   ④ diverge a $-\infty$
   ⑤ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

12. (2 risposte corrette, 2 punti) Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori ortogonali di $\mathbb{R}^3$. Allora

   1. $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$
   2. $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$
   3. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$
   4. $\|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$
   5. una sola delle altre affermazioni è corretta.

13. (1 risposta corretta, 1 punto) Le due rette

$$r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 4-t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-t \\ z = 2+t \end{cases}$$

   ① sono coincidenti
   ② sono parallele, ma non coincidenti
   ③ sono incidenti in un punto
   ④ sono sghembe
   ⑤ sono ortogonali.

14. (1 risposta corretta, 1 punto) Si consideri l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma \sqrt{x^2+y^2+4z}\,\mathrm{d}s \qquad \text{dove} \qquad \gamma : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

   Allora

   ① $I = -1$
   ② $I = 0$
   ③ $I = 1$
   ④ $I = \frac{8}{3}$
   ⑤ $I = \frac{16}{3}$
   ⑥ $I = \frac{18}{3}$.

Esercizio carta e penna (6 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x.$$

1. Determinare il dominio e le eventuali simmetrie della funzione f. Inoltre, studiare i limiti al bordo del dominio e determinare gli eventuali asintoti.
2. Calcolare f' determinandone l'insieme di definizione.
3. Studiare la monotonia di f e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locale e globale.
4. Calcolare f'' determinandone l'insieme di definizione.
5. Studiare la cocavità di f e determinare gli eventuali punti di flesso.
6. Tracciare il grafico qualitativo della funzione f.

$\boxed{\text{Soluzione}}$

1. Il dominio di f è $D = \mathbb{R}$. Inoltre, essendo somma di due funzioni dispari, anche f è dispari. Poiché
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2},$$
la funzione presenta un asintoto orizzontale, di equazione $y = -\pi/2$, per $x \to +\infty$ e un asintoto orizzontale, di equazione $y = \pi/2$, per $x \to -\infty$. Non ci sono altri asintoti.

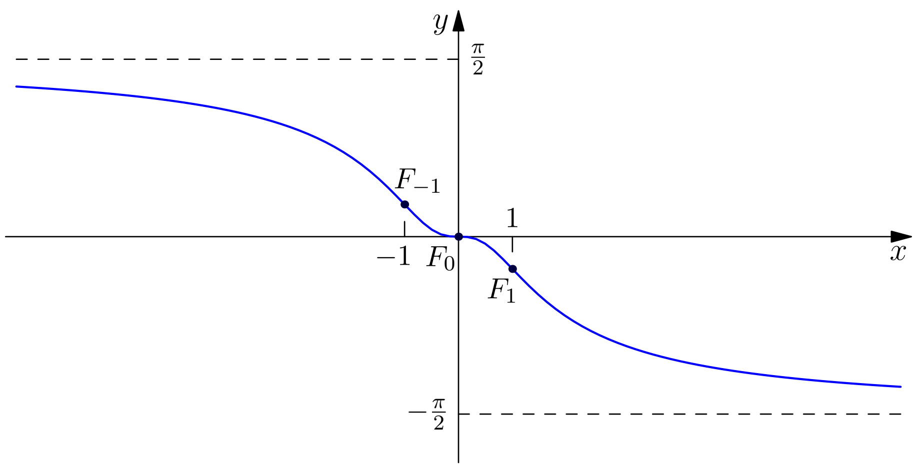
2. Si ha
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\,.$$
La funzione f' è definita su tutto D.

3. Si ha
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad x = 0,\\ f'(x) < 0 \quad &\iff \quad x \neq 0. \end{aligned}$$
Pertanto, la funzione è (strettamente) decrescente e in $x_0 = 0$ presenta un punto a tangente orizzontale. Non ci sono punti di massimo o di minimo.

4. Si ha
$$f''(x) = -\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}\,.$$
La funzione f' è definita su tutto D.

5. Si ha
$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\iff \quad x = 0, \pm 1\\ f''(x) > 0 \quad &\iff \quad -1 < x < 0\,,\ x > 1\\ f''(x) < 0 \quad &\iff \quad x < -1\,,\ 0 < x < 1. \end{aligned}$$
Pertanto, la funzione ammette i seguenti tre punti di flesso:
$$F_0 \equiv (0,0)\,, \qquad F_{-1} \equiv \left(-1, -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{e} \qquad F_1 \equiv \left(1, \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\,.$$

6. Grafico qualitativo:



Teoria (6 punti)

1. Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.
2. Enunciare e dimostrare il teorema di monotonia per le funzioni derivabili.