

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_ Compito A

Nome: \_\_\_\_\_

Punteggio Totale: \_\_\_\_\_

**Istruzioni.** Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

**Tempo.** 1 ora.

## QUESTIONARIO (4 punti, soglia sufficienza 2)

1. (1 risposta corretta) L'estremo superiore dell'insieme  $A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$

① vale 0

③ vale  $\frac{1}{2}$ ⑤ vale  $e^{-1}$ 

② vale 1

④ vale  $e$ 

⑥ non esiste.

2. (1 risposta corretta) In  $\mathbb{C}$ , le soluzioni dell'equazione  $z^8 = (2 + i)^4$

① sono tutte reali

④ sono esattamente 2

② sono tutte puramente immaginarie

⑤ sono esattamente 4

③ sono infinite

⑥ sono esattamente 8.

3. (2 risposte corrette) Sia  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la trasformazione del piano di Gauss definita da

$$T(z) = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} z.$$

Sia poi  $E = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ . Allora

①  $T$  è una rotazione di un angolo  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ⑤  $T(E) \neq E$ ②  $T$  è una rotazione di un angolo  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ⑥  $T(E) \subset E$ ③  $T$  è una riflessione⑦  $T(E) \supset E$ ④  $T$  è una omotetia⑧  $T(E) = E$ .

4. (2 risposte corrette) Dato il parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\alpha x) & \text{se } x \geq 0 \\ \alpha - \frac{\alpha^2}{2} x^2 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

① è derivabile in  $x = 0$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ ④ non è mai derivabile in  $x = 0$ ② è derivabile in  $x = 0$  se e solo se  $\alpha = 1$ ⑤ è inferiormente limitata per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ ③ è derivabile in  $x = 0$  se e solo se  $\alpha = -1$ ⑥ è superiormente limitata per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## ESERCIZIO (6 punti, soglia sufficienza 3)

Si consideri la funzione

$$f(x) = (x^2 + 2x) e^{-\frac{2}{x}}.$$

- Determinare il dominio, il segno e gli eventuali asintoti di  $f$ .
- (a) Calcolare  $f'$ . Trovare i punti critici e classificarli.  
(b) Stabilire poi se esistono punti di estremo assoluto.
- Tracciare il grafico qualitativo di  $f$  sulla base delle informazioni ricavate (senza studiare  $f''$ ).





TEORIA (4 punti, soglia sufficienza 2)

- Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.