Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 *Primo compito in itinere – 4 Novembre 2022*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________ **Compito A**

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora.*

Questionario (4 punti, soglia sufficienza 2)

1. (1 risposta corretta) L'estremo superiore dell'insieme $A = \left\{ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \ : \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$

① vale 0 ② vale 1 ③ ✓ vale $\frac{1}{2}$ ④ vale e ⑤ vale e^{-1} ⑥ non esiste.

---

2. (1 risposta corretta) In $\mathbb{C}$, le soluzioni dell'equazione $z^8 = (2+\mathrm{i})^4$

① sono tutte reali
② sono tutte puramente immaginarie
③ sono infinite
④ sono esattamente 2
⑤ sono esattamente 4
⑥ ✓ sono esattamente 8.

---

3. (2 risposte corrette) Sia $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la trasformazione del piano di Gauss definita da

$$T(z) = \frac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\, z\,.$$

Sia poi $E = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 \le |z| \le 2\}$. Allora

[1] T è una rotazione di un angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$
[2] ✓ T è una rotazione di un angolo $\theta = \frac{\pi}{3}$
[3] T è una riflessione
[4] T è una omotetia
[5] $T(E) \neq E$
[6] $T(E) \subset E$
[7] $T(E) \supset E$
[8] ✓ $T(E) = E$.

---

4. (2 risposte corrette) Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\alpha x) & \text{se } x \ge 0 \\ \alpha - \dfrac{\alpha^2}{2}\, x^2 & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$

[1] è derivabile in $x = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
[2] ✓ è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 1$
[3] è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha = -1$
[4] non è mai derivabile in $x = 0$
[5] è inferiormente limitata per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
[6] ✓ è superiormente limitata per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio (6 punti, soglia sufficienza 3)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \left(x^2 + 2x\right) \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}\,.$$

1. Determinare il dominio, il segno e gli eventuali asintoti di f.
2. (a) Calcolare f'. Trovare i punti critici e classificarli.
   (b) Stabilire poi se esistono punti di estremo assoluto.
3. Tracciare il grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni ricavate (senza studiare f'').

1. La funzione è definita per ogni $x \neq 0$. Quindi, il dominio di f è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Poiché l'esponenziale è sempre positivo, il segno di f corrisponde al segno di $x^2 + 2x$. Quindi f si annulla per $x = -2$, è positiva per $x < -2$ e per $x > 0$, ed è negativa per $-2 < x < 0$.
Per i limiti al bordo, si ha (per la gerarchia degli infiniti)

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 2x)\, e^{-\frac{2}{x}} = 0 \qquad ((x^2 + 2x) \to 0\,,\ e^{-\frac{2}{x}} \to 0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x)\, e^{-\frac{2}{x}} = -\infty \text{[1]} \qquad ((x^2 + 2x) \to 0^-\,,\ e^{-\frac{2}{x}} \to +\infty)\,.$$

Pertanto, l'asse y è un asintoto verticale per $x \to 0^-$. Inoltre, si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (x^2 + 2x)\, e^{-\frac{2}{x}} = +\infty \qquad ((x^2 + 2x) \to +\infty\,,\ e^{-\frac{2}{x}} \to 1)$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} (x + 2)\, e^{-\frac{2}{x}} = \pm\infty \qquad ((x + 2) \to \pm\infty\,,\ e^{-\frac{2}{x}} \to 1)\,.$$

Quindi, non ci sono asintoti orizzontali né obliqui.

2. (a) Per ogni $x \in D$, si ha

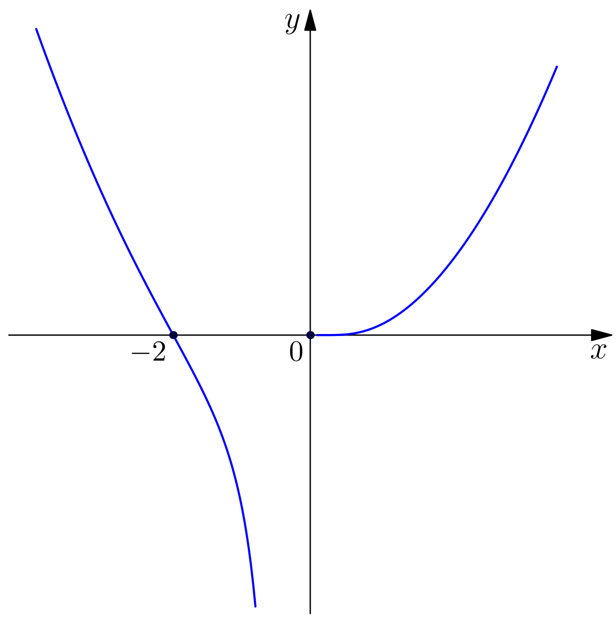
$$f'(x) = (2x + 2)\, e^{-\frac{2}{x}} + (x^2 + 2x)\, \frac{2}{x^2}\, e^{-\frac{2}{x}} = 2\left(x + 1 + 1 + \frac{2}{x}\right) e^{-\frac{2}{x}} = 2\frac{x^2 + 2x + 2}{x}\, e^{-\frac{2}{x}}\,.$$

I punti critici di f sono i punti in cui la f' si annulla. Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 + 2x + 2 = 0$. Poiché il polinomio $x^2 + 2x + 2$ ha discriminante negativo, non ha radici reali. Inoltre, tale polinomio ha sempre segno positivo. Di conseguenza, la funzione non possiede punti critici e $f'(x) < 0$ per $x < 0$ e $f'(x) > 0$ per $x > 0$, ossia la funzione è strettamente decrescente per $x < 0$ ed è strettamente crescente per $x > 0$.
infine, osserviamo che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 2\frac{x^2 + 2x + 2}{x}\, e^{-\frac{2}{x}} = 0\,.$$

(b) Poiché $Imf = \mathbb{R}$, non esistono punti di estremo assoluto.

3. Grafico qualitativo:



[1]Si ha $x^2 + 2x \sim 2x$ per $x \to 0$. Quindi, per De L'Hôpital, si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x\, e^{-2/x} = 2 \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-2/x}}{1/x} = 2 \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{-2t}}{t} = -4 \lim_{t \to -\infty} e^{-2t} = -\infty\,.$$

Teoria (4 punti, soglia sufficienza 2)

☐ Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.