

Cognome: _____

Matricola: _____ Compito B

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora.

QUESTIONARIO (4 punti, soglia sufficienza 2)

1. (1 risposta corretta) L'estremo inferiore dell'insieme $A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$

① vale 0

③ vale $\frac{1}{2}$ ⑤ vale e^{-1}

② vale 1

④ vale e

⑥ non esiste.

2. (1 risposta corretta) In \mathbb{C} , le soluzioni dell'equazione $z^8 = (3 - i)^4$

① sono tutte reali

④ sono esattamente 2

② sono tutte puramente immaginarie

⑤ sono esattamente 4

③ sono infinite

⑥ sono esattamente 8.

3. (2 risposte corrette) Sia $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la trasformazione del piano di Gauss definita da

$$T(z) = \frac{\sqrt{3} + i}{2} z.$$

Sia poi $E = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$. Allora

① T è una rotazione di un angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$ ⑤ $T(E) \neq E$ ② T è una rotazione di un angolo $\theta = \frac{\pi}{3}$ ⑥ $T(E) \subset E$ ③ T è una riflessione⑦ $T(E) \supset E$ ④ T è una omotetia⑧ $T(E) = E$.

4. (2 risposte corrette) Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\alpha x) & \text{se } x \geq 0 \\ -\alpha + \frac{\alpha^2}{2} x^2 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

① è derivabile in $x = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ④ non è mai derivabile in $x = 0$ ② è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 1$ ⑤ è inferiormente limitata per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ③ è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha = -1$ ⑥ è superiormente limitata per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO (6 punti, soglia sufficienza 3)

Si consideri la funzione

$$f(x) = (x^2 - 2x)e^{\frac{2}{x}}.$$

- Determinare il dominio, il segno e gli eventuali asintoti di f .
- (a) Calcolare f' . Trovare i punti critici e classificarli.
(b) Stabilire poi se esistono punti di estremo assoluto.
- Tracciare il grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni ricavate (senza studiare f'').

TEORIA (4 punti, soglia sufficienza 2)

- Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.