

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora e 15 minuti.

QUESTIONARIO (6 punti, soglia sufficienza 3)

1. (1 risposta corretta, 1 punto) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin(x^2)}{e^{x^2} - 1 - x^2}$
- ① non esiste ② vale -1 ③ vale 0 ④ vale 1 ⑤ vale $-\infty$ ⑥ vale $+\infty$

2. (1 risposta corretta, 1 punto) L'integrale $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$ vale
- ① 0 ② $\pi/4$ ③ $\pi/2$ ④ $1/4$ ⑤ $-1/2$ ⑥ $+\infty$

3. (3 risposte corrette, 1 punto) Si consideri la funzione $f(x) = \frac{x^3 + 2x + 2}{(x^4 + 2)\sqrt{x}}$. Allora
- ① $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge ③ $\int_0^1 f(x) dx$ converge ⑤ $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge
- ② $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge ④ $\int_0^1 f(x) dx$ diverge ⑥ $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ diverge

4. (1 risposta corretta, 1 punto) La serie $\sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos \frac{1}{n^a}\right)$, dove $a > 0$, converge se e solo se
- ① $a > 1/2$ ② $a < 1/2$ ③ $a < 1$ ④ $a > 1$

5. (1 risposta corretta, 1 punto) Comunque dati tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$,

- ① se $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, allora $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è una base destrorsa di \mathbb{R}^3
- ② se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, allora \mathbf{u} e $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ sono ortogonali
- ③ se $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$, allora \mathbf{u} e $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ sono paralleli
- ④ se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono complanari, allora \mathbf{w} e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ sono paralleli

6. (1 risposta corretta, 1 punto) Si consideri la curva regolare γ parametrizzata dalla funzione vettoriale $f(t) = (t^2 - 1, t, t^2 + 2)$, $t \in \mathbb{R}$, e il punto $A = f(0)$.

- ① γ è contenuta nel piano $\pi : x + y - z + 3 = 0$ ③ γ è contenuta nel piano $\pi : x - z + 2 = 0$
- ② La retta tangente a γ in A è $r : \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$ ④ La retta tangente a γ in A è $r : \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$

ESERCIZIO (6 punti, soglia sufficienza 3)

Si considerino i punti $O \equiv (0, 0, 0)$ e $P \equiv (1, 1, -1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

1. Determinare la distanza tra P ed r .
2. Determinare l'equazione parametrica della retta s passante per P e ortogonale e incidente ad r .
3. Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente i punti O e P e parallelo alla retta r .

SOLUZIONE

TEORIA (6 punti, soglia sufficienza 3)

1. (2 punti) Dare la definizione di integrale di linea (di prima specie).
2. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della media per gli integrali di linea.