Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 — *Appello completo – 9 Gennaio 2023*

**Cognome:** ______________________ **Matricola:** ______________________

**Nome:** ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

**Istruzioni.** *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

**Tempo.** *2 ore e 15 minuti.*

---

## Questionario (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (1 risposta corretta, 1 punto) Si consideri l'equazione $z^3 = 8\mathrm{i}$, con $z \in \mathbb{C}$. Allora, tutte le radici

① sono reali
② sono immaginarie pure
③ hanno parte reale nulla
④ hanno parte immaginaria nulla
⑤ hanno modulo 2
⑥ hanno modulo $2\sqrt{2}$

---

2. (2 risposte corrette, 1 punto) Si consideri la funzione $f(x) = \ln(1 - \ln|x|)$.

[1] Il suo dominio è $(-\mathrm{e}, 0) \cup (0, \mathrm{e})$
[2] Il suo dominio è $(-\infty, -\mathrm{e}) \cup (\mathrm{e}, +\infty)$
[3] Il suo dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
[4] $f(x) > 0$ in $(-1, 0) \cup (0, 1)$
[5] $f(x) > 0$ in $(-\mathrm{e}, 0) \cup (0, \mathrm{e})$
[6] $f(x) > 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

---

3. (1 risposta corretta, 1 punto) Il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\sin(n)$

① vale $0$ ② vale $\frac{1}{2}$ ③ vale $1$ ④ vale $+\infty$ ⑤ non esiste

---

4. (1 risposta corretta, 1 punto) Sia $a \in \mathbb{R}$. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{se } x < 0 \\ a(x+1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è continua per

① $a = -1$
② $a = 0$
③ $a = 1$
④ $a = 1/2$
⑤ ogni $a \in \mathbb{R}$
⑥ nessun valore di $a$

---

5. (1 risposta corretta, 1 punto) Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin(x^2)}{\mathrm{e}^{x^2} - 1 - x^2}$

① non esiste ② vale $-1$ ③ vale $0$ ④ vale $1$ ⑤ vale $-\infty$ ⑥ vale $+\infty$

---

6. (1 risposta corretta, 1 punto) L'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\,\mathrm{d}x$ vale

① $0$ ② $\pi/4$ ③ $\pi/2$ ④ $1/4$ ⑤ $-1/2$ ⑥ $+\infty$

---

7. (3 risposte corrette, 1 punto) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{x^3+2x+2}{(x^4+2)\sqrt{x}}$ . Allora

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge | $\boxed{3}$ $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge | $\boxed{5}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge |
| $\boxed{2}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge | $\boxed{4}$ $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge | $\boxed{6}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge |

---

8. (1 risposta corretta, 1 punto) La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\frac{1}{n^a}\right)$, dove $a>0$, converge se e solo se

① $a > 1/2$ ② $a < 1/2$ ③ $a < 1$ ④ $a > 1$

---

9. (1 risposta corretta, 1 punto) Comunque dati tre vettori $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$,

① se $\mathbf{w}=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$, allora $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ è una base destrorsa di $\mathbb{R}^3$
② se $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$, allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ sono ortogonali
③ se $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}$, allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ sono paralleli
④ se $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ sono complanari, allora $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ sono paralleli

---

10. (1 risposta corretta, 1 punto) Si consideri la curva regolare $\gamma$ parametrizzata dalla funzione vettoriale $f(t)=(t^2-1,t,t^2+2)$, $t\in\mathbb{R}$, e il punto $A=f(0)$.

① $\gamma$ è contenuta nel piano $\pi: x+y-z+3=0$
③ $\gamma$ è contenuta nel piano $\pi: x-z+2=0$
② La retta tangente a $\gamma$ in $A$ è $r:\begin{cases}x=-1\\y=t\\z=2\end{cases}$
④ La retta tangente a $\gamma$ in $A$ è $r:\begin{cases}x=-1\\y=t\\z=2+t\end{cases}$

---

## Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (6 punti) Si consideri la funzione
$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}-\operatorname{artg}\frac{1}{x}\,.$$
   (a) Determinare il dominio, i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti.
   (b) Calcolare $f'$ determinandone l'insieme di definizione, e studiare la monotonia di $f$ determinando i punti di massimo e minimo locale e globale.
   (c) Calcolate $f''$ e studiare la concavità di $f$ determinando gli eventuali flessi.
   (d) Tracciare il grafico qualitativo di $f$ (coerente con tutte le informazioni ottenute).

2. (6 punti) Si considerino i punti $O\equiv(0,0,0)$ e $P\equiv(1,1,-1)$ e la retta
$$r:\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=2+t\,.\end{cases}$$
   (a) Determinare la distanza tra $P$ ed $r$.
   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta $s$ passante per $P$ e ortogonale e incidente ad $r$.
   (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente i punti $O$ e $P$ e parallelo alla retta $r$.

## Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del confronto (per successioni).

2. (a) (2 punti) Dare la definizione di integrale di linea (di prima specie).
   (b) (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della media per gli integrali di linea.