Analisi e Geometria 1 *Appello completo – 9 Gennaio 2023*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (1 risposta corretta, 1 punto) Si consideri l'equazione $z^3 = 8\mathrm{i}$, con $z \in \mathbb{C}$. Allora, tutte le radici

   (1) sono reali
   (2) sono immaginarie pure
   (3) hanno parte reale nulla
   (4) hanno parte immaginaria nulla
   (5) ✓ hanno modulo 2
   (6) hanno modulo $2\sqrt{2}$

2. (2 risposte corrette, 1 punto) Si consideri la funzione $f(x) = \ln(1 - \ln|x|)$.

   [1] ✓ Il suo dominio è $(-\mathrm{e}, 0) \cup (0, \mathrm{e})$
   [2] Il suo dominio è $(-\infty, -\mathrm{e}) \cup (\mathrm{e}, +\infty)$
   [3] Il suo dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
   [4] ✓ $f(x) > 0$ in $(-1, 0) \cup (0, 1)$
   [5] $f(x) > 0$ in $(-\mathrm{e}, 0) \cup (0, \mathrm{e})$
   [6] $f(x) > 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

3. (1 risposta corretta, 1 punto) Il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\sin(n)$

   (1) ✓ vale 0 (2) vale $\frac{1}{2}$ (3) vale 1 (4) vale $+\infty$ (5) non esiste

4. (1 risposta corretta, 1 punto) Sia $a \in \mathbb{R}$. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{se } x < 0 \\ a(x+1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

   è continua per

   (1) $a = -1$
   (2) $a = 0$
   (3) ✓ $a = 1$
   (4) $a = 1/2$
   (5) ogni $a \in \mathbb{R}$
   (6) nessun valore di a

5. (1 risposta corretta, 1 punto) Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin(x^2)}{\mathrm{e}^{x^2} - 1 - x^2}$

   (1) non esiste (2) ✓ vale -1 (3) vale 0 (4) vale 1 (5) vale $-\infty$ (6) vale $+\infty$

6. (1 risposta corretta, 1 punto) L'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\,\mathrm{d}x$ vale

   (1) 0 (2) ✓ $\pi/4$ (3) $\pi/2$ (4) $1/4$ (5) $-1/2$ (6) $+\infty$

7. (3 risposte corrette, 1 punto) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{x^3+2x+2}{(x^4+2)\sqrt{x}}$. Allora

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge | $\boxed{3}$ $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge | $\boxed{5}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge | $\boxed{4}$ $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge | $\boxed{6}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge

---

8. (1 risposta corretta, 1 punto) La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\frac{1}{n^a}\right)$, dove $a>0$, converge se e solo se

① $a > 1/2$ ② $a < 1/2$ ③ $a < 1$ ④ $a > 1$

---

9. (1 risposta corretta, 1 punto) Comunque dati tre vettori $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$,

① se $\mathbf{w} = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$, allora $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ è una base destrorsa di $\mathbb{R}^3$

② se $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$, allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ sono ortogonali

③ se $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = \mathbf{u}\wedge\mathbf{w}$, allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ sono paralleli

④ se $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ sono complanari, allora $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ sono paralleli

---

10. (1 risposta corretta, 1 punto) Si consideri la curva regolare γ parametrizzata dalla funzione vettoriale $f(t) = (t^2-1, t, t^2+2)$, $t \in \mathbb{R}$, e il punto $A = f(0)$.

① γ è contenuta nel piano $\pi : x+y-z+3=0$

② La retta tangente a γ in A è $r : \begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$

③ γ è contenuta nel piano $\pi : x-z+2=0$

④ La retta tangente a γ in A è $r : \begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=2+t \end{cases}$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (6 punti) Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} - \operatorname{artg}\frac{1}{x} .$$
   (a) Determinare il dominio, i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti.
   (b) Calcolare f' determinandone l'insieme di definizione, e studiare la monotonia di f determinando i punti di massimo e minimo locale e globale.
   (c) Calcolate f'' e studiare la concavità di f determinando gli eventuali flessi.
   (d) Tracciare il grafico qualitativo di f (coerente con tutte le informazioni ottenute).

2. (6 punti) Si considerino i punti $O \equiv (0,0,0)$ e $P \equiv (1,1,-1)$ e la retta
$$r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2+t\,. \end{cases}$$
   (a) Determinare la distanza tra P ed r .
   (b) Determinare l'equazione parametrica della retta s passante per P e ortogonale e incidente ad r .
   (c) Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente i punti O e P e parallelo alla retta r .

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del confronto (per successioni).

2. (a) (2 punti) Dare la definizione di integrale di linea (di prima specie).
   (b) (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della media per gli integrali di linea.

1. (a) Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. I limiti al bordo del dominio sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \pi\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,.$$

Inoltre, si ha

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Pertanto, la funzione f ammette la retta $r : y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$ come asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

(b) Si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{2(1+x^2)}\,.$$

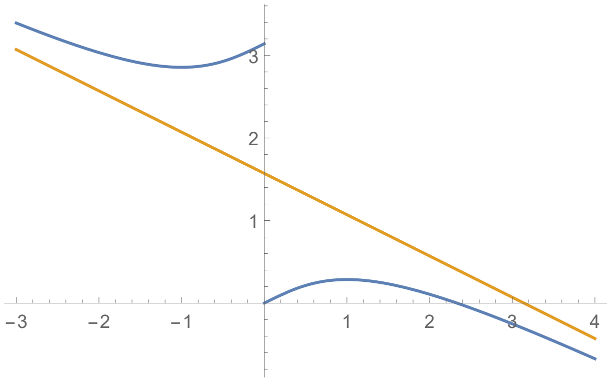
La funzione f' è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e può essere estesa con continuità in 0. In particolare, si ha $f'(0) = 1/2$. Inoltre, si ha $f'(x) \geq 0$, ossia $x^2 - 1 \leq 0$ ossia $-1 \leq x \leq 1$. Pertanto, f cresce su $(-1, 0) \cup (0, 1)$, mentre decresce su $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Infine, f possiede un punto di minimo locale, dato da $(-1, \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4})$, e un punto di massimo locale, dato da $(1, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})$.

(c) Si ha

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,.$$

Pertanto $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq 0$. Così f ha concavità rivolta verso l'alto per $x < 0$ e ha concavità rivolta verso il basso per $x > 0$. Tuttavia, f non possiede flessi.

(d) Osserviamo che $f(x) \geq -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$ se e solo se $\operatorname{artg} \frac{1}{x} \leq 0$, ossia $x < 0$. Quindi, il grafico di f si trova al di sopra dell'asintoto obliquo per $x < 0$, mentre si trova al di sotto dell'asintoto obliquo per $x > 0$. In conclusione, il grafico qualitativo di f è



2. (a) I parametri direttori di r sono $(1 : -1 : 1)$. Il piano che passa per P ortogonale ad r è

$$\pi : 1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z+1) = 0\,, \qquad \text{ossia} \qquad \pi : x - y + z + 1 = 0\,.$$

Intersecando r con π, si ha $1+t-(1-t)+2+t+1 = 0$, ossia $t = -1$. Pertanto, la proiezione ortogonale di P su r è data dal punto $P' = r \cap \pi \equiv (0, 2, 1)$. Di conseguenza, si ha $d(P, r) = d(P, P') = \sqrt{6}$.

(b) La retta s passante per P e ortogonale e incidente ad r coincide con la retta che passa per P e P', e quindi

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 - 2t\,. \end{cases}$$

(c) Primo modo. La retta che passa per i punti O e P ha equazioni

$$OP : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad OP : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0\,. \end{cases}$$

Il fascio che ha OP come sostegno è

$$\Phi : \lambda(x - y) + \mu(x + z) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \Phi : (\lambda + \mu)x - \lambda y + \mu z = 0\,.$$

Il piano $\pi' \in \Phi$ parallelo alla retta r è determinato dalla condizione $1 \cdot (\lambda + \mu) - 1 \cdot (-\lambda) + 1 \cdot \mu = 0$, ossia $\lambda + \mu = 0$. Pertanto $\pi' : y + z = 0$.

Secondo modo. Sia $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$ il vettore direttore di r e sia $\mathbf{b} = P - O = (1, 1, -1)$. Allora, il vettore $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (0, 2, 2)$ è ortogonale ad entrambi i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e quindi è ortogonale al piano π' cercato. Pertanto, il piano π' può essere visto come il piano che passa per O e che ha come direzione ortogonale quella individuata dal vettore $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Di conseguenza, si ha

$$\pi' : 0 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 0) + 2 \cdot (z - 0) = 0$$

ossia $\pi' : y + z = 0$.