Analisi e Geometria 1 — *Secondo compito in itinere – 9 Gennaio 2023*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 15 minuti.*

Questionario (6 punti, soglia sufficienza 3)

1. (1 risposta corretta, 1 punto) Il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)-\sin(x^2)}{e^{x^2}-1-x^2}$

① non esiste ② vale -1 ③ vale 0 ④ vale 1 ⑤ vale $-\infty$ ⑥ vale $+\infty$

---

2. (1 risposta corretta, 1 punto) L'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$ vale

① 0 ② $\pi/4$ ③ $\pi/2$ ④ $1/4$ ⑤ $-1/2$ ⑥ $+\infty$

---

3. (3 risposte corrette, 1 punto) Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{x^3+2x+2}{(x^4+2)\sqrt{x}}$. Allora

1 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge 3 $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\,dx$ converge 5 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

2 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge 4 $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\,dx$ diverge 6 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge

---

4. (1 risposta corretta, 1 punto) La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\frac{1}{n^a}\right)$, dove $a>0$, converge se e solo se

① $a > 1/2$ ② $a < 1/2$ ③ $a < 1$ ④ $a > 1$

---

5. (1 risposta corretta, 1 punto) Comunque dati tre vettori $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$,

① se $\mathbf{w} = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$, allora $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ è una base destrorsa di $\mathbb{R}^3$

② se $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$, allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ sono ortogonali

③ se $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = \mathbf{u}\wedge\mathbf{w}$, allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ sono paralleli

④ se $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ sono complanari, allora $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ sono paralleli

---

6. (1 risposta corretta, 1 punto) Si consideri la curva regolare γ parametrizzata dalla funzione vettoriale $f(t) = (t^2-1, t, t^2+2)$, $t\in\mathbb{R}$, e il punto $A = f(0)$.

① γ è contenuta nel piano $\pi : x+y-z+3=0$

③ γ è contenuta nel piano $\pi : x-z+2=0$

② La retta tangente a γ in A è $r : \begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$

④ La retta tangente a γ in A è $r : \begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=2+t \end{cases}$

Esercizio (6 punti, soglia sufficienza 3)

Si considerino i punti $O \equiv (0,0,0)$ e $P \equiv (1,1,-1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t\,. \end{cases}$$

1. Determinare la distanza tra P ed r.
2. Determinare l'equazione parametrica della retta s passante per P e ortogonale e incidente ad r.
3. Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente i punti O e P e parallelo alla retta r.

Soluzione

1. I parametri direttori di r sono $(1 : -1 : 1)$. Il piano che passa per P ortogonale ad r è

   $$\pi : 1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z+1) = 0\,, \qquad \text{ossia} \qquad \pi : x - y + z + 1 = 0\,.$$

   Intersecando r con π, si ha $1 + t - (1-t) + 2 + t + 1 = 0$, ossia $t = -1$. Pertanto, la proiezione ortogonale di P su r è data dal punto $P' = r \cap \pi \equiv (0,2,1)$. Di conseguenza, si ha $d(P,r) = d(P,P') = \sqrt{6}$.

2. La retta s passante per P e ortogonale e incidente ad r coincide con la retta che passa per P e P', e quindi

   $$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 - 2t\,. \end{cases}$$

3. La retta che passa per i punti O e P ha equazioni

   $$OP : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad OP : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0\,. \end{cases}$$

   Il fascio che ha OP come sostegno è

   $$\Phi : \lambda(x-y) + \mu(x+z) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \Phi : (\lambda+\mu)x - \lambda y + \mu z = 0\,.$$

   Il piano $\pi' \in \Phi$ parallelo alla retta r è determinato dalla condizione $1 \cdot (\lambda+\mu) - 1 \cdot (-\lambda) + 1 \cdot \mu = 0$, ossia $\lambda + \mu = 0$. Pertanto $\pi' : y + z = 0$.

Teoria (6 punti, soglia sufficienza 3)

1. (2 punti) Dare la definizione di integrale di linea (di prima specie).
2. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della media per gli integrali di linea.