Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 — *Primo Appello – 30 Gennaio 2023*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (10 punti, soglia sufficienza 5)

(Segnare le affermazioni corrette, una e una sola per ogni quesito. Ogni quesito vale un punto)

1. Dato $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$, la parte immaginaria di $w = \dfrac{z^3}{\mathrm{i}^5}$ è

① 0 ② $3x^2y - y^3$ ③ $-3x^2y + y^3$ ④ ✓ $3xy^2 - x^3$ ⑤ $-3xy^2 + x^3$

---

2. Sia $I_n = \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ l' intersezione di tutti gli intervalli I_n.

① I è l'insieme vuoto
② ✓ I contiene esattamente un punto
③ I contiene infiniti punti
④ Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $I_n \subseteq I_{n+1}$
⑤ Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $I_n \cap I_{n+1} = \varnothing$
⑥ Nessuna delle altre affermazioni è corretta

---

3. Siano $\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} n \log\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$ ed $\ell_2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^{2n}$.

① $\ell_1 = +\infty$, $\ell_2 = 1$ ② $\ell_1 = 2$, $\ell_2 = 1$ ③ $\ell_1 = 0$, $\ell_2 = \mathrm{e}^2$ ④ ✓ $\ell_1 = 2$, $\ell_2 = \mathrm{e}$

---

4. Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione dove $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{3^k} = 1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia $S = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

① $S = 0$ ② ✓ $S = \frac{3}{2}$ ③ $S = \frac{2}{3}$ ④ $S = +\infty$ ⑤ S non esiste

---

5. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione continua. Sia $Z(f)$ l'insieme degli zeri di f in $[a, b]$ e sia $\operatorname{Im} f$ l'immagine di f.

① Se $f(a)f(b) > 0$, allora $Z(f) = \varnothing$
② Se $f(a)f(b) < 0$, allora $Z(f) = \{x_0\}$
③ Se $f(a)f(b) \neq 0$, allora $Z(f) \neq \varnothing$
④ $\operatorname{Im} f$ può essere un intervallo aperto
⑤ $\operatorname{Im} f$ può essere un intervallo illimitato
⑥ ✓ $\operatorname{Im} f$ è sempre un intervallo chiuso e limitato

---

6. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x^2} & x > 0 \\ x^2 + ax + 1 & x \leq 0 . \end{cases}$

① f_a è derivabile per ogni $a \in \mathbb{R}$
② ✓ f_a non è mai derivabile
③ f_a può essere continua, ma non derivabile
④ f_a è derivabile solo per $a = -\frac{1}{2}$
⑤ f_a è derivabile solo per $a = \frac{1}{2}$
⑥ f_a è derivabile solo per $a = 1$

---

7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(0) = 0$ e $f'(0) = 3$. Sia $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+2x} - 1}$.

① $L = 0$ ② $L = 1$ ③ $L = 3$ ④ $L = \frac{3}{2}$ ⑤ $L = +\infty$ ⑥ $\nexists\, L$

---

8. Si consideri la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \log(1 + t^4)\, dt$, per $x \in \mathbb{R}$. Allora

① $F'(x) = \log(1 + x^4)$ ③ $F'(x) = 2x \log(1 + x^6)$

② $F'(x) = \log(1 + x^8)$ ④ $F'(x) = 2x \log(1 + x^8)$

---

9. L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a} \operatorname{artg} \frac{1}{x^2}\, dx$ è convergente se e solo se

① $a < -1$ ② $a > 1$ ③ $0 < a < 1$ ④ $-1 < a < 1$

---

10. Nel triangolo di vertici $A \equiv (3, 0, 3)$, $B \equiv (2, -1, 3)$ e $C \equiv (1, -3, 4)$, la misura in radianti dell'angolo di vertice B è

① $\dfrac{\pi}{6}$ ② $\dfrac{\pi}{4}$ ③ $\dfrac{\pi}{2}$ ④ $\dfrac{5}{6}\pi$ ⑤ $\dfrac{4}{3}\pi$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (7 punti) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1 - x\,.$$

(a) i. Determinare i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti.
ii. Stabilire se f può essere estesa con continiutà a tutto $\mathbb{R}$.

(b) i. Calcolare f' e studiare la monotonia di f.
ii. Motivando la risposta, dire quanti sono gli zeri di f.

(c) Calcolate f'' e studiare la concavità di f determinando gli eventuali flessi.

(d) Tracciare il grafico qualitativo di f.

2. (5 punti) Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = t^2 + \cos t \\ y = t^2 - \sin t \\ z = t^2 + t \end{cases} \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right).$$

(a) Determinare la terna intrinseca di γ nel punto $P \equiv (1, 0, 0)$.

(b) Determinare i punti $Q \in \gamma$ in cui la retta tangente è ortogonale alla retta tangente in P.

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (a) (1 punto) Dare la definizione di funzione continua in un punto x_0.
(b) (1 punto) Dare la definizione di funzione derivabile in un punto x_0.
(c) (2 punti) Dimostrare che una funzione derivabile in un punto x_0 è continua in x_0.

2. (a) (1 punto) Dare la definizione di norma di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
(b) (1 punto) Dare la definizione di angolo tra due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
(c) (4 punti) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Soluzione degli esercizi

1. (a) i. I limiti al bordo del dominio sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

Inoltre, si ha

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \qquad \text{e} \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = 0\,.$$

Pertanto, la funzione f ammette la retta $r : y = -x$ come asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

ii. Essendo illimitata in un intorno destro di 0, la funzione f non può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$.

(b) i. Si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1 = -\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2}{x^2}\,.$$

Poiché $f'(x) < 0$ per ogni $x \neq 0$, la funzione f è strettamente decrescente su ciascuno degli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ (ma non è decrescente sul suo dominio). Non ci sono punti di massimo né punti di minimo locali. In particolare, si ha $\lim_{x\to 0^-} f'(0) = -1$.

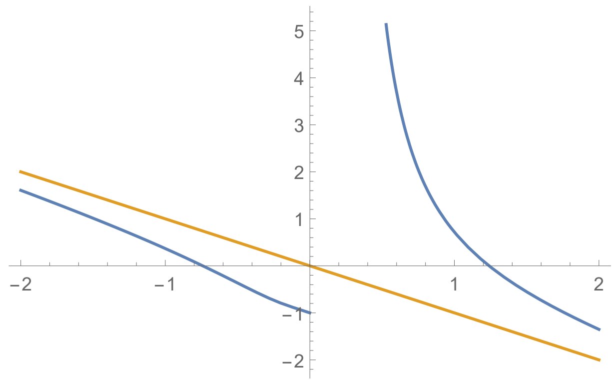
ii. Poiché f è strettamente decrescente sull'intervallo $(-\infty, 0)$ e poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, la funzione f possiede esattamente uno zero sull'intervallo $(-\infty, 0)$. Analogamente, poiché f è strettamente decrescente sull'intervallo $(0, +\infty)$ e poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, la funzione f possiede esattamente uno zero sull'intervallo $(0, +\infty)$.

(c) Si ha

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \frac{2x+1}{x^4}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,.$$

Pertanto $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq -1/2$. Così f ha concavità rivolta verso il basso per $x < -1/2$ e ha concavità rivolta verso l'alto per $-1/2 < x < 0$ e $x > 0$. In particolare, f possiede un flesso $F \equiv (-1/2, \mathrm{e}^{-2} - 1/2)$.

(d) Osserviamo che $f(x) \geq -x$ se e solo se $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leq 1$, ossia $x > 0$. Quindi, il grafico di f si trova al di sotto dell'asintoto obliquo per $x < 0$, mentre si trova al di sopra dell'asintoto obliquo per $x > 0$. In conclusione, il grafico qualitativo di f è



2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza la curva γ, ossia $f(t) = (t^2 + \cos t, t^2 - \sin t, t^2 + t)$.

(a) Il punto $P \equiv (1, 0, 0)$ appartiene a γ per $t = 0$. Poiché

$$\begin{cases} x' = 2t - \sin t \\ y' = 2t - \cos t \\ z' = 2t + 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = 2 - \cos t \\ y'' = 2 + \sin t \\ z'' = 2\,, \end{cases}$$

si ha $f'(0) = (0, -1, 1)$, $f''(0) = (1, 2, 2)$ e $f'(0) \wedge f''(0) = (-4, 1, 1)$. Pertanto, i vettori della terna intrinseca cercata sono

$$\mathbf{t}(0) = \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}\,, \quad \mathbf{b}(0) = \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(-4,1,1)}{3\sqrt{2}}\,, \quad \mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{(1,2,2)}{3}\,.$$

Si osservi che, essendo $f'(0) \perp f''(0)$, si ha anche

$$\mathbf{n}(0) = \frac{f''(0)}{\|f''(0)\|} = \frac{(1,2,2)}{3}\,.$$

(b) Sia $Q = f(t)$ un punto di γ (che risulta regolare). In Q la retta tangente è ortogonale alla retta tangente in P quando $f'(t)$ è ortogonale a $f'(0)$, ossia quando

$$0 \cdot (2t - \sin t) + (-1) \cdot (2t - \cos t) + 1 \cdot (2t + 1) = 0$$

ossia quando $\cos t = -1$, e questo lo si ha per $t = \pi$. Esiste quindi un solo punto con la proprietà richiesta dato da $Q \equiv (\pi^2 - 1, \pi^2, \pi + \pi^2)$.