Analisi e Geometria 1 *Secondo appello – 16 Giugno 2023*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (10 punti, soglia sufficienza 5)

(Segnare le affermazioni corrette, una e una sola per ogni quesito. Ogni quesito vale un punto)

1. Sia $A = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 \leq |z| \leq 2\,,\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg z < 0\}$. Allora

① $-1 \in A$ ② $-1-\mathrm{i} \in A$ ③ $-1+\mathrm{i} \in A$ ④ $1-\mathrm{i} \in A$ ⑤ $\mathrm{i} \in A$ ⑥ $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}} \in A$

---

2. Si consideri l'insieme $A = \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, dove $a_n = \log \dfrac{n+2}{n+1}$. Allora

① $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n < 0$

② $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n > 0$

③ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente

④ A ammette un estremo inferiore, ma non un minimo

⑤ A ammette un estremo superiore, ma non un massimo

---

3. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora

① se $f(a) = f(b)$, allora la funzione f è costante

② se $f(a) < f(b)$, allora per ogni $c \in (a,b)$ si ha $f(c) \in (f(a), f(b))$

③ esiste un $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$

④ esiste un $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$

⑥ nessuna delle altre affermazioni è corretta

---

4. Sia $a \in \mathbb{R}$. Sia $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & x > 0 \\ x^2 + ax + 1 & x \leq 0\,. \end{cases}$

① Per ogni $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a è derivabile

② Per ogni $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a è continua, ma non derivabile

③ Se $a = 1$, allora f_a è derivabile

④ Se $a = \frac{1}{2}$, allora f_a è derivabile

⑤ Nessuna delle altre affermazioni è corretta

---

5. La funzione $f(x) = \dfrac{x \log x}{\log x - 2}$

① ha solo un asintoto verticale e un asintoto orizzontale

② ha solo un asintoto verticale e un asintoto obliquo

③ ha solo un asintoto verticale

④ non ha asintoti

⑤ nessuna delle altre affermazioni è corretta

---

6. Il polinomio di MacLaurin di ordine 4 della funzione $f(x) = \log(1 - 3x^2)$ è

① $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$ ② $-3x^2 + \frac{9}{2}x^4$ ③ $3x^2 - \frac{9}{2}x^4$ ④ $-3x^2 - \frac{9}{2}x^4$ ⑤ $3x^2 + \frac{9}{2}x^4$

---

7. L'integrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^\alpha}\,dx$

① converge se e solo se $\alpha \in [0,+\infty)$
② converge se e solo se $\alpha \in (0,+\infty)$
③ converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
④ non converge per nessun valore di $\alpha \in \mathbb{R}$

---

8. Quale delle seguenti serie converge?

① $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ② $\sum_{n\geq 1} \frac{5^n}{4^{n-2}}$ ③ $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ④ $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{3n-1}$ ⑤ Nessuna

---

9. Siano $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ due versori con prodotto scalare $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = -1$. Allora i due versori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

① formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$
② formano un angolo di $-\frac{\pi}{4}$
③ formano un angolo di $\frac{3}{4}\pi$
④ formano un angolo di $-\frac{3}{4}\pi$
⑤ sono ortogonali
⑥ sono opposti

---

10. Sia γ la curva parametrizzata dalla funzione vettoriale $f(t) = (\cos e^t, -e^t, \sin e^t)$, con $t \in [0,1]$. Allora, la lunghezza di γ è

① $L = e$ ② $L = \sqrt{2}\,e$ ③ $L = e-1$ ④ $L = \sqrt{2}\,(e-1)$ ⑤ $L = +\infty$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (8 punti) Sia f la funzione definita da $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^5}{x^2}}$.
   (a) Determinare il dominio di f e i limiti agli estremi del dominio.
   (b) Determinare gli eventuali asintoti di f.
   (c) Determinare la derivata prima e gli eventuali punti di massimo e minimo locale di f.
   (d) Disegnare il grafico qualitativo di f.

2. (4 punti) Sia r la retta che passa per i punti $A \equiv (1,0,2)$ e $B \equiv (3,4,1)$ e sia s la retta intersezione dei piani $x-2y-1=0$ e $y+z=0$.
   (a) Stabilire la posizione reciproca di r ed s.
   (b) Sia Φ il fascio di piani di equazione $\lambda(x-2y-1)+\mu(y+z)=0$, dove $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$. Determinare il piano $\pi \in \Phi$ parallelo alla retta r.
   (c) Calcolare la distanza tra le rette r ed s.

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (a) (2 punti) Enunciare il teorema di Weierstrass per le funzioni continue.
   (b) (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema dei valori intermedi.
   (c) (1 punti) Dire come è fatta l'immagine di un intervallo I mediante una funzione continua.

2. (a) (1 punti) Dare la definizione della distanza di un punto da un piano.
   (b) (3 punti) Enunciare e dimostrare la formula della distanza di un punto da un piano.

Soluzione degli esercizi

1. (a) Si ha $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.$$

(b) Si ha un asintoto verticale $x = 0$ per $x \to 0$, e si ha un asintoto obliquo $y = x + \frac{5}{3}$ per $x \to \pm\infty$, poiché

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^5}} = 1 \\ q &= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^2}} - x \right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x \left(\sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^5}} - 1 \right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\big((1+x^{-1})^{\frac{5}{3}} - 1\big) = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

(c) Derivata prima: per $x \neq 0$, si ha

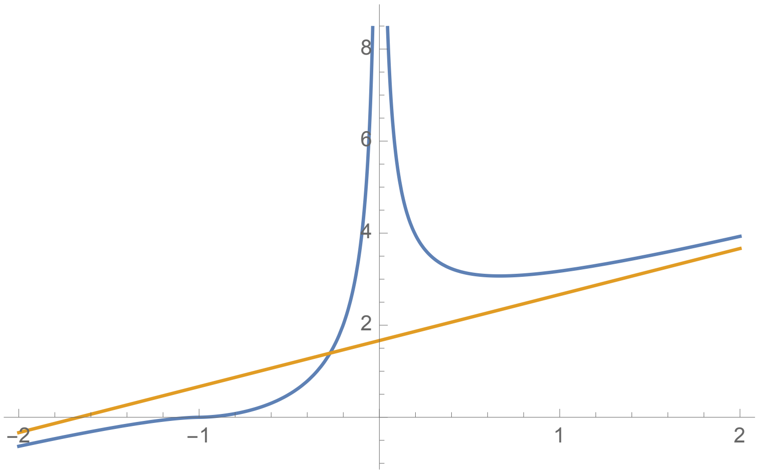
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}} + \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}[5 - 2x^{-1}(x+1)] \\ &= \frac{1}{3}(1+x^{-1})^{\frac{2}{3}}(3 - 2x^{-1}). \end{aligned}$$

Punti di estremo locale:

$$\begin{aligned} &f'(x) = 0 \iff x = -1 \ \text{e} \ x = \frac{2}{3} \\ &x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \implies f'(x) > 0 \\ &x \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \implies f'(x) < 0. \end{aligned}$$

In $x_m = \frac{2}{3}$ si ha un punto di minimo locale.
In $x_f = -1$ si ha un punto di flesso orizzontale.

(d) Grafico:



2. (a) Le equazioni parametriche di r e di s sono

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -t. \end{cases}$$

Le rette sono sghembe.

(b) I piani hanno vettore normale $\mathbf{n} = (\lambda, -2\lambda + \mu, \mu)$. Imponendo che $\langle \mathbf{n}, (2, 4, -1) \rangle = 0$, si trova $\mu = 2\lambda$. Il piano del fascio parallelo a r ha equazione

$$x + 2z - 1 = 0.$$

(c) La distanza tra le due rette si può calcolare scegliendo un punto qualunque $P \in r$ e calcolando la distanza di P da π. Quindi, per $P = A$, si ha

$$d(r, s) = d(A, \pi) = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$