Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 *Terzo appello – 7 Luglio 2023*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (10 punti, soglia sufficienza 5)

(Segnare le affermazioni corrette (◯ una sola, ☐ esattamente due). Ogni quesito vale un punto)

1. Siano $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 \leq |z| \leq 2, \ \operatorname{Re} z \leq 0, \ \operatorname{Im} z \leq 0\}$ e $B = \left\{z^3 \ : \ z \in \mathbb{C}, \ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}\right\}$. Allora $A \cap B$

   ① è vuoto
   ② consiste di un solo elemento
   ③ consiste di due soli elementi
   ④ consiste di un numero infinito di elementi, che giacciono sull'asse immaginario
   ⑤ ✓ consiste di un numero infinito di elementi, che giacciono sull'asse reale

---

2. Si consideri il numero complesso $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})^4}$. Allora

   ☐1 ✓ $\arg z = \dfrac{\pi}{12}$ ☐2 $\arg z = -\dfrac{5\pi}{12}$ ☐3 $|z| > 1$ ☐4 $|z| = 1$ ☐5 ✓ $|z| < 1$

---

3. Si consideri la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove $a_n = \left(1 - \cos\dfrac{1}{\sqrt{n+7}}\right) \cdot \sqrt{n+6}$. Allora

   ① $a_n > \frac{1}{2}$ definitivamente
   ② ✓ $a_n < 1$ definitivamente
   ③ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata superiormente
   ④ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata inferiormente

---

4. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - 2x$. Allora f

   ① è sempre negativa
   ② è sempre positiva
   ③ ✓ ammette almeno uno zero
   ④ è limitata superiormente

---

5. Sia $f : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x^3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Allora

   ☐1 f non è continua in $x = 0$
   ☐2 f è continua, ma non derivabile in $x = 0$
   ☐3 ✓ f è derivabile in $x = 0$
   ☐4 per $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{x^3}}{\cos^2 x^2} + \operatorname{tg} x^2 \cdot \cos\frac{1}{x^3}$
   ☐5 ✓ per $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{2x \sin\frac{1}{x^3}}{\cos^2 x^2} - \dfrac{3\operatorname{tg} x^2 \cdot \cos\frac{1}{x^3}}{x^4}$

---

6. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - x\sin x}{x + \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3x}}$

   ① non esiste ② vale 0 ③ vale $1/2$ ④ vale $-1/2$ ⑤ vale $2/5$ ⑥ ✓ vale $-2/5$

---

7. L'integrale $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \ln^2 x \, dx$ vale

① 0 ② $2e - 1$ ③ $2e^2$ ④ $2e^2 - e$ ⑤ $2e^2 - e + 1$

---

8. La funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{1+t^2}} \, dt$

① ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

② non ammette un asintoto orizzontale, ma uno obliquo per $x \to +\infty$

③ ammette un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

④ non ammette un asintoto orizzontale, ma uno obliquo per $x \to -\infty$

---

9. Si considerino le serie $A = \sum_{n \geq 0} a_n$ e $B = \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$, dove $a_n = \dfrac{n^3 - 5 \sin n}{2^{n+1} + 4n}$. Allora

① A converge, ma B non converge

② A non converge, ma B converge

③ A e B convergono

④ A e B non convergono

---

10. Sia γ la curva parametrizzata dalla funzione vettoriale $f(t) = (2\sqrt{2}t - \sin t,\ 2\sqrt{2} \sin t + t,\ 3 \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Allora γ

① non è regolare

② è regolare, ma non è biregolare

③ ha lunghezza $6\sqrt{2}\,\pi$

④ ha lunghezza $\sqrt{18}\,\pi$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (8 punti) Sia f la funzione definita da $f(x) = \operatorname{artg} \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$.
   (a) Determinare il dominio di f, i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti. Stabilire poi se f può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Calcolare f', determinandone l'insieme di definizione.
   (c) Studiare la monotonia di f determinando i punti di massimo e minimo locale e globale.
   (d) Disegnare il grafico qualitativo di f.

2. (4 punti) Si considerino i punti $A \equiv (-1, 3, -5)$ e $B \equiv (-2, -1, 4)$, e il piano $\pi : 2x - 6y + 3z - 14 = 0$.
   (a) Calcolare la distanza tra il punto A e il piano π e stabilire se $B \in \pi$.
   (b) Determinare il punto C proiezione ortogonale di A su π.
   (c) Determinare gli angoli del triangolo di vertici A, B e C.

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (a) (1 punti) Dare la definizione di numero irrazionale.
   (b) (2 punti) Dimostrare che $\sqrt{2}$ è irrazionale.

2. (a) (1 punti) Dare la definizione di serie numerica (reale).
   (b) (1 punti) Dare la definizione del carattere di una serie numerica.
   (c) (1 punti) Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.

3. (a) (1 punti) Dare la definizione della norma di una vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
   (b) (3 punti) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza triangolare per la norma.

Soluzione degli esercizi

1. (a) Dominio di f: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Limiti al bordo del dominio:

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to (-1)^{\pm}} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

La funzione f ha solo un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$, dato dalla retta $y = 0$. La funzione f non può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$, poiché possiede delle discontinuità di tipo salto.

(b) Si ha

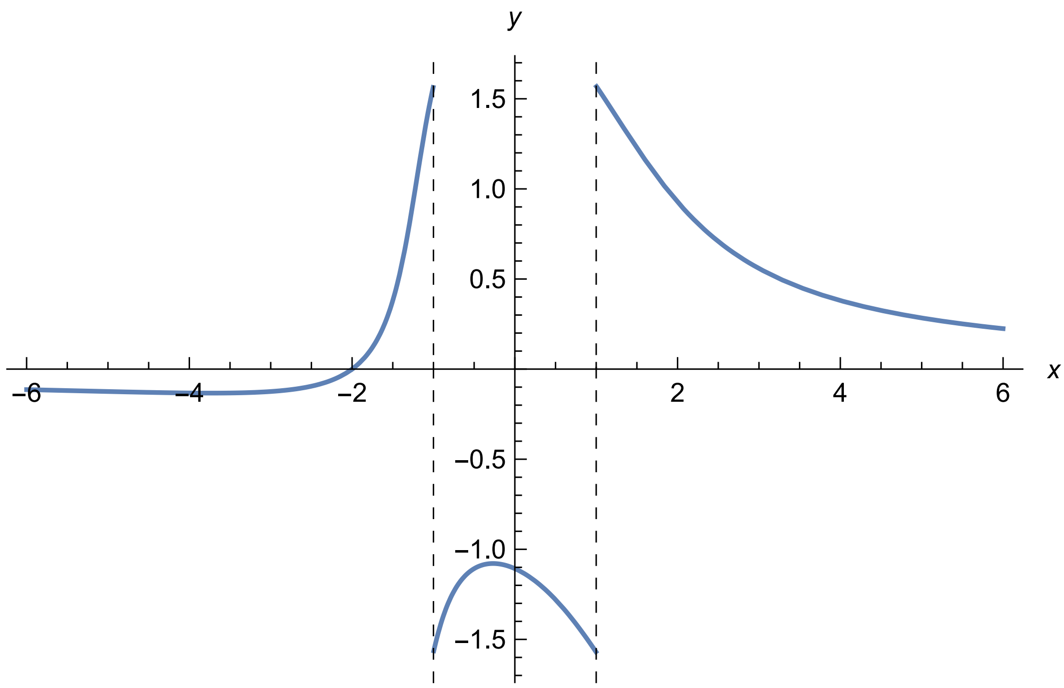
$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x+2}{x^2-1})^2} \frac{x^2 - 1 - 2x(x+2)}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2-1)^2 + (x+2)^2}.$$

Poiché f è derivabile nel suo dominio, si ha che l'insieme di definizione di f' è $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. In particolare, si ha

$$\lim_{x \to 1} f'(x) = -\frac{2}{3}, \qquad \lim_{x \to -1} f'(x) = 2, \qquad f'(-2) = \frac{1}{3}.$$

(c) Si ha $f'(x) \geq 0$ sse $x^2 + 4x + 1 \leq 0$, ossia $-2 - \sqrt{3} \leq x \leq -2 + \sqrt{3}$. Così si ha: $f'(x) = 0$ per $x = -2 \pm \sqrt{3}$, $f'(x) > 0$ per $-2 - \sqrt{3} < x < -2\sqrt{3}$, $f'(x) < 0$ per $x < -2 - \sqrt{3}$ o $x > -2 + \sqrt{3}$. Quindi $-2 - \sqrt{3}$ è un punto di minimo locale mentre $-2 + \sqrt{3}$ è un punto di massimo locale.

(d) Grafico qualitativo:



2. Si considerino i punti $A \equiv (-1, 3, -5)$ e $B \equiv (-2, -1, 4)$, e il piano $\pi : 2x - 6y + 3z - 14 = 0$.

(a) La distanza tra A e π è

$$d(A, \pi) = \frac{|-2 - 18 - 15 - 14|}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{49}{\sqrt{49}} = 7.$$

Poiché $-4 + 6 + 12 - 14 = 0$, si ha che $B \in \pi$.

(b) Consideriamo la retta passante per A e ortogonale a π:

$$r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 6t \\ z = -5 + 3t. \end{cases}$$

Intersecando r con π, si ottiene $t = 1$ e quindi $C \equiv (1, -3, -2)$.

(c) Siano α, β e γ gli angoli del triangolo considerato corrispondenti ai vertici A, B e C. poiché $B \in \pi$, si ha $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Di conseguenza, si ha $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Calcoliamo α. Siano $\mathbf{x} = B - A = (-1, -4.9)$ e $\mathbf{y} = C - A = (2, -6.3)$. Allora

$$\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} = \frac{-2 + 24 + 27}{\sqrt{1 + 16 + 81}\sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{49}{\sqrt{82}\sqrt{49}} = \frac{7}{7\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ossia $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Infine $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{4}$.