Analisi e Geometria 1 — *Quarto appello – 11 Settembre 2023*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni. *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (10 punti, soglia sufficienza 5)

(Segnare le affermazioni corrette (◯ una sola, ☐ esattamente due). Ogni quesito vale un punto)

1. In $\mathbb{C}$, le soluzioni dell'equazione $z^{10} = (1-\mathrm{i})^5$ sono

① 0
② infinite
③ tutte di modulo 1
④ esattamente 5
⑤ ✓ esattamente 10
⑥ esattamente le soluzioni dell'equazione $z^2 = 1-\mathrm{i}$

---

2. Sia $I_n = \left[1 - \dfrac{1}{n+1}, 1 + \dfrac{1}{n+1}\right]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia $I = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Allora

① $I = \varnothing$
② $I = \{-1\}$
③ $I = \{0\}$
④ ✓ $I = \{1\}$
⑤ $I = [0,1]$
⑥ $I = (0,1)$

---

3. Sia $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$, dove $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{4^k}$. Allora

① $L = 0$
② ✓ $L = \frac{4}{3}$
③ $L = \frac{3}{4}$
④ $L = +\infty$
⑤ L non esiste

---

4. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

① Se $f(0)f(1) > 0$, allora f non ha zeri in $[0,1]$
② Se $f(0) = f(1)$, allora f non ha zeri in $[0,1]$
③ ✓ $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(\alpha)$ per almeno un $\alpha \in [0,1]$
④ $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \neq f(\alpha)$ per ogni $\alpha \in [0,1]$

---

5. Il polinomio di MacLaurin di ordine 5 della funzione $f(x) = 2x^3 \cos x - \sin x^2$ è

① ✓ $-x^2 + 2x^3 - x^5$
② $x^2 - 2x^3 - x^5$
③ $x^2 + 2x^3 + x^5$
④ $-x^2 - 2x^3 - x^5$

---

6. Sia $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

① ✓ $F'(x) = 3x^2\mathrm{e}^{-x^6} - \mathrm{e}^{-x^2}$
② $F'(x) = -3x^2\mathrm{e}^{-x^6} - \mathrm{e}^{-x^2}$
③ $F'(x) = \mathrm{e}^{-x^6} - \mathrm{e}^{-x^2}$
④ $F'(x) = \mathrm{e}^{-x^6} + \mathrm{e}^{-x^2}$

---

7. Sia $f(x) = \dfrac{x+2}{(|x|+1)\sqrt[3]{x}}$, e siano $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, $J = \displaystyle\int_1^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ e $K = \displaystyle\int_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Allora

   [1] I converge   [3] J diverge   [5] K converge

   [2] I diverge   [4] J è irregolare   [6] K diverge

---

8. Quali delle seguenti serie convergono assolutamente?

   [1] $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ [2] $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos n \cdot \log(1+n^{-4/3})$

   [3] $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ [4] $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \operatorname{artg}\frac{1}{n}$

---

9. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.

   (1) Se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, allora $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ hanno lo stesso modulo

   (3) Se $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$, allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ sono paralleli

   (2) Se $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, allora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono necessariamente ortogonali

   (4) Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono complanari, allora $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ sono necessariamente paralleli

---

10. Sia γ la curva parametrizzata dalla funzione vettoriale $f(t) = (t^2+1, t, t^2-1)$, $t \in \mathbb{R}$. Sia r la retta tangente a γ nel punto $A = f(0)$. Allora

    (1) γ è contenuta nel piano $\pi : x - z = -2$ (3) r ha equazione parametrica $g(t) = (1, t, 1)$

    (2) γ è contenuta nel piano $\pi : x - z = 2$ (4) r ha equazione parametrica $g(t) = (-1, t, 1)$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (7 punti) Sia f la funzione definita da $f(x) = \dfrac{1-2x}{1+x^2} + \operatorname{artg} x$.

   (a) Determinare il dominio di f, i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti.

   (b) Calcolare f', studiare la monotonia di f e determinare i punti di massimo e minimo locale di f.

   (c) Calcolare f'', studiare la concavità di f e determinare i punti di flesso di f.

   (d) Disegnare il grafico qualitativo di f.

2. (5 punti)

   (a) Scrivere l'equazione della sfera S di centro $C \equiv (1,1,1)$ e raggio $R = 1$.

   (b) Determinare la posizione reciproca tra la sfera S e la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t\,. \end{cases}$$

   (c) Se r ed S si intersecano in due punti distinti A e B, calcolare la distanza tra A e B.

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (5 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.

2. (2 punti) Enunciare il criterio di Leibniz per le serie numeriche.

3. (a) (1 punto) Dare la definizione di prodotto scalare di due vettori di $\mathbb{R}^n$.

   (b) (1 punto) Dare la definizione di norma di un vettore di $\mathbb{R}^n$.

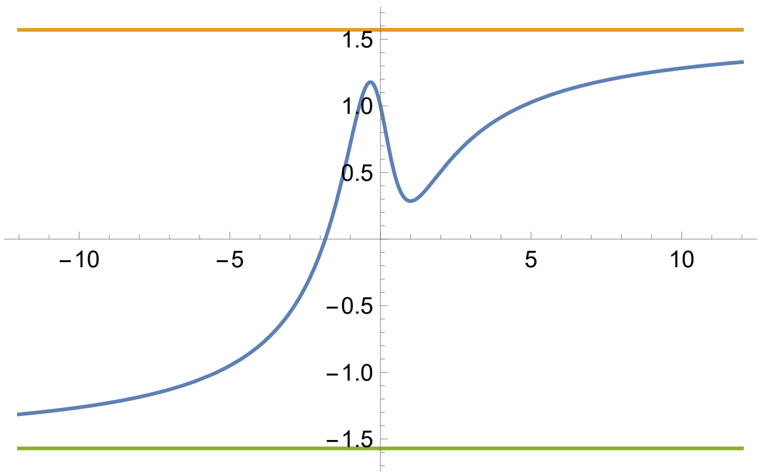
   (c) (1 punto) Scrivere la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

1. (a) Si ha $D(f) = \mathbb{R}$ e
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$
Si hanno due asintoti orizzontali, $y = \frac{\pi}{2}$ per $x \to +\infty$ e $y = -\frac{\pi}{2}$ per $x \to -\infty$.

(b) Derivata prima:
$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(1+x^2)^2}.$$
Punti di estremo locale:
$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1 \ \text{ e } \ x = -\frac{1}{3} \\ & f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in \Big(-\infty, -\frac{1}{3}\Big) \cup (1, +\infty) \\ & f'(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in \Big(-\frac{1}{3}, 1\Big). \end{aligned}$$
In $x_M = -\frac{1}{3}$ si ha un punto di massimo locale.
In $x_m = 1$ si ha un punto di minimo locale.

(c) Derivata seconda:
$$f''(x) = -2\,\frac{3x^3 - 3x^2 - 5x + 1}{(1+x^2)^3}.$$
Punti di estremo locale:
$$\begin{aligned} & f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1\,,\ x = \frac{3-\sqrt{6}}{3}\,,\ x = \frac{3+\sqrt{6}}{3} \\ & f''(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in \left(-1, \frac{3-\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}, +\infty\right) \\ & f''(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}, \frac{3+\sqrt{6}}{3}\right). \end{aligned}$$
In $x_0 = -1$ e in $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{6}}{3}$ si hanno dei punti di flesso.

(d) Grafico:



2. (a) $S\,:\,(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$, ossia $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0$.

(b) Intersecando r ed S, si ottiene $6t^2 + 2t = 0$, ossia $t = 0$ e $t = -1/3$. Quindi, r ed S sono incidenti, ossia si intersecano in due punti distinti.

(c) r ed S si intersecano nei punti $A \equiv (1,1,2)$ e $B \equiv \left(1 - \frac{2}{3}, 1 + \frac{1}{3}, 2 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Quindi
$$d(A,B) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$