

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Punteggio Totale: \_\_\_\_\_

**Istruzioni.** Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

**Tempo.** 1 ora.

## QUESTIONARIO (4 punti, soglia sufficienza 2)

(Segnare le affermazioni corrette ( $\odot$  una sola,  $\square$  più di una). Ogni quesito vale un punto)

1. In  $\mathbb{C}$ , le soluzioni dell'equazione  $z^2 = |z| + 2$  sono

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| <input type="radio"/> ① 0        | <input checked="" type="radio"/> ④ tutte puramente reali  |
| <input type="radio"/> ② solo una | <input type="radio"/> ⑤ tutte puramente immaginarie       |
| <input type="radio"/> ③ infinite | <input type="radio"/> ⑥ nessuna delle risposte precedenti |

2. Se  $z = ie^{\frac{4+i\pi}{20}}$  e  $w = z^{10}$ , allora

- |                                   |  |  |
|-----------------------------------|--|--|
| <input type="radio"/> ① $ w  = 1$ | <input type="radio"/> ③ $ w  = ie^2$   | <input type="radio"/> ⑤ $\arg w = \frac{\pi}{2}$             |
| <input type="radio"/> ② $ w  = e$ | <input type="radio"/> ④ $\arg w = \pi$ | <input checked="" type="radio"/> ⑥ $\arg w = -\frac{\pi}{2}$ |

3. Dati gli insiemi

$$A = \left\{ \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \frac{1}{2k+1} : k \in \mathbb{N} \right\},$$

si ha

- |   |  |   |
|---|--|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> ① $\min A$ non esiste | <input type="checkbox"/> ③ $B$ possiede minimo             | <input checked="" type="checkbox"/> ⑤ $\inf A = \inf B$ |
| <input type="checkbox"/> ② $\max A$ non esiste            | <input checked="" type="checkbox"/> ④ $B$ possiede massimo | <input type="checkbox"/> ⑥ $\sup A = \sup B$            |

4. Il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

- |                                |                                |   |  |  |  |
|--------------------------------|--------------------------------|---|--|--|--|
| <input type="radio"/> ① vale 0 | <input type="radio"/> ② vale 1 | <input type="radio"/> ③ vale $\sqrt{e}$ | <input checked="" type="radio"/> ④ vale $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | <input type="radio"/> ⑤ vale $+\infty$ | <input type="radio"/> ⑥ vale $-\infty$ |
|--------------------------------|--------------------------------|---|--|--|--|

## ESERCIZIO (6 punti, soglia sufficienza 3)

1. Sia  $f$  la funzione definita da  $f(x) = (x-1)^2 e^{-|x|}$ .

- Determinare il dominio di  $f$ , studiare il segno di  $f$  e stabilire se  $f$  è continua.
- Determinare i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti.
- Calcolare  $f'$ , determinare il suo dominio e classificare gli eventuali punti di non derivabilità.
- Determinare i punti critici di  $f$ , gli intervalli di monotonia e i punti di estremo.
- Disegnare il grafico qualitativo di  $f$  (senza lo studio di  $f''$ ) e determinare l'immagine di  $f$ .

## TEORIA (4 punti, soglia sufficienza 2)

- (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del confronto per le successioni reali.
- (1 punto) Dare la definizione di funzione continua in un punto.

## SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO

1.  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $f \in C(\mathbb{R})$ ,  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0$  se e solo se  $x = 1$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0^+$  (asintoti orizzontali).

3.  $D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $x = 0$  punto angoloso:

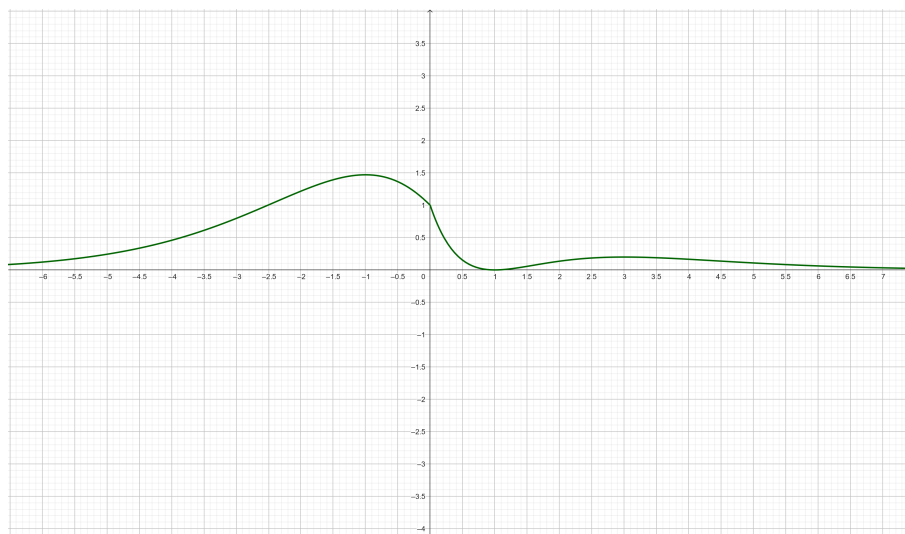
$$\begin{aligned} x > 0 & \quad f'(x) = (x-1)(3-x)e^{-x}, \\ x < 0 & \quad f'(x) = (x-1)(x+1)e^x. \end{aligned}$$

4.  $f'(x) > 0$  per  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 3)$ ,

$f'(x) < 0$  per  $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$ ,

$x = -1, 3$  punti di Max,  $x = 1$  punto di Min.

5. Grafico:



$$\text{Im}(f) = [0, f(-1)] = [0, 4/e].$$