

Cognome: _____

Matricola: _____

Nome: _____

Punteggio Totale: _____

Istruzioni. Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Tempo. 1 ora.

QUESTIONARIO (4 punti, soglia sufficienza 2)

(Segnare le affermazioni corrette (\odot una sola, \square più di una). Ogni quesito vale un punto)

1. In \mathbb{C} , le soluzioni dell'equazione $z^2 = 2|z| + 3$ sono

- | | |
|----------------------------------|---|
| <input type="radio"/> ① 0 | <input checked="" type="radio"/> ④ tutte puramente reali |
| <input type="radio"/> ② solo una | <input type="radio"/> ⑤ tutte puramente immaginarie |
| <input type="radio"/> ③ infinite | <input type="radio"/> ⑥ nessuna delle risposte precedenti |

2. Se $z = i e^{\frac{4-i\pi}{20}}$ e $w = z^{10}$, allora

- | | | |
|-----------------------------------|--|---|
| <input type="radio"/> ① $ w = 1$ | <input type="radio"/> ③ $ w = i e^2$ | <input checked="" type="radio"/> ⑤ $\arg w = \frac{\pi}{2}$ |
| <input type="radio"/> ② $ w = e$ | <input type="radio"/> ④ $\arg w = \pi$ | <input type="radio"/> ⑥ $\arg w = -\frac{\pi}{2}$ |

3. Dati gli insiemi

$$A = \left\{ -\frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \frac{1}{2k+1} : k \in \mathbb{N} \right\},$$

si ha

- | | | |
|--|---|--|
| <input type="radio"/> ① $\min A$ non esiste | <input type="radio"/> ③ B possiede minimo | <input type="radio"/> ⑤ $\inf A = \sup B$ |
| <input checked="" type="radio"/> ② $\max A$ non esiste | <input checked="" type="radio"/> ④ B possiede massimo | <input checked="" type="radio"/> ⑥ $\sup A = \inf B$ |

4. Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$

- | | | | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--|---|--|--|
| <input type="radio"/> ① vale 0 | <input type="radio"/> ② vale 1 | <input checked="" type="radio"/> ③ vale \sqrt{e} | <input type="radio"/> ④ vale $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | <input type="radio"/> ⑤ vale $+\infty$ | <input type="radio"/> ⑥ vale $-\infty$ |
|--------------------------------|--------------------------------|--|---|--|--|

ESERCIZIO (6 punti, soglia sufficienza 3)

1. Sia f la funzione definita da $f(x) = (x+1)^2 e^{-|x|}$.

- Determinare il dominio di f , studiare il segno di f e stabilire se f è continua.
- Determinare i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti.
- Calcolare f' , determinare il suo dominio e classificare gli eventuali punti di non derivabilità.
- Determinare i punti critici di f , gli intervalli di monotonia e i punti di estremo.
- Disegnare il grafico qualitativo di f (senza lo studio di f'') e determinare l'immagine di f .

TEORIA (4 punti, soglia sufficienza 2)

- (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del confronto per le successioni reali.
- (1 punto) Dare la definizione di funzione continua in un punto.

SOLUZIONE DELL'ESERCIZIO

1. $D(f) = \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{R})$, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se e solo se $x = -1$.
2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0^+$ (asintoti orizzontali).
3. $D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = 0$ punto angoloso:

$$\begin{aligned} x > 0 & \quad f'(x) = (x+1)(1-x)e^{-x}, \\ x < 0 & \quad f'(x) = (x+1)(x+3)e^x. \end{aligned}$$

4. $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1)$,
 $f'(x) < 0$ per $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$,
 $x = -3, 1$ punti di Max, $x = -1$ punto di Min.

5. Grafico:



$$\text{Im}(f) = [0, f(1)] = [0, 4/e].$$