Analisi e Geometria 1 *Appello intero – 19 Gennaio 2024*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni: *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo: *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (10 punti, soglia sufficienza 5)

(Segnare le affermazioni corrette (◯ una sola, ☐ più di una). Ogni quesito vale un punto)

1. Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ formato solo da numeri razionali, ossia $X \subseteq \mathbb{Q}$. Se X è non vuoto e superiormente limitato, allora

   - [1] può non esistere $\sup X$
   - [2] esiste $\sup X$ e $\sup X \in \mathbb{Q}$
   - [3 ✓] esiste $\sup X$ e $\sup X \in \mathbb{R}$
   - [4 ✓] può essere $\sup X \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - [5] X non ammette mai massimo
   - [6 ✓] l'insieme dei maggioranti di X non è vuoto

---

2. Si considerino gli intervalli $I_n = [-\arctan n, \mathrm{e}^{-n}] \subseteq \mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e la loro intersezione $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Allora

   - (1) $I = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
   - (2) $I = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
   - (3) $I = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$
   - (4) $I = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$
   - (5) $I = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right]$
   - (6 ✓) $I = \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$
   - (7) $I = \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right)$
   - (8) $I = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

---

3. L'equazione $z - \overline{z} = |z|$ ha in $\mathbb{C}$

   - (1) zero soluzioni
   - (2 ✓) una sola soluzione
   - (3) due soluzioni
   - (4) infinite soluzioni

---

4. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotòna e derivabile in (a, b). Allora

   - (1) si ha $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$
   - (2) f non può avere flessi a tangente orizzontale
   - (3 ✓) f è iniettiva
   - (4) f è suriettiva

---

5. Il limite $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{2\cos x - \sqrt{3}}$ vale

   - (1) 0
   - (2) $\sqrt{3}$
   - (3 ✓) $-\sqrt{3}$
   - (4) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
   - (5) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

---

6. Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$. Allora

   - [1] $F(x) = 2x + o(x)$ per $x \to 0$
   - [2 ✓] $F(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$
   - [3 ✓] $\lim_{x \to \pm\infty} F(x)$ esistono finiti
   - [4] F è crescente in $\mathbb{R}$
   - [5] F è decrescente in $\mathbb{R}$
   - [6] F non ha punti di estremo in $\mathbb{R}$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-\alpha n}$ converge se e solo se

① $\alpha \neq 0$ ② $\alpha > 0$ ③ $\alpha \geq 0$ ④ $\alpha > 1$ ⑤ $\alpha \geq 1$

---

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La distanza del punto $P \equiv (1,1,1)$ dal piano $\pi : x+y+z=\alpha$ vale $\sqrt{3}$ se e solo se

① $\alpha = 0$ ② $\alpha = 6$ ③ $\alpha = -6$ ④ $\alpha \in \{0,6\}$ ⑤ $\alpha \in \{0,-6\}$

---

9. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia π il piano passante per l'origine e per i punti $A \equiv (1,1,1)$ e $B \equiv (0,2,0)$. Il punto $P \equiv (1,0,\alpha)$ appartiene a π se e solo se

① $\alpha = -2$ ② $\alpha = -1$ ③ $\alpha = 0$ ④ $\alpha = 1$ ⑤ $\alpha = 2$

---

10. La lunghezza dell curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cos t \\ y = \mathrm{e}^t \sin t \\ z = \dfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}t} \end{cases} \qquad t \in [0, \ln 4]$$

è

① $3\sqrt{2}\,(2\sqrt{2}-1)$ ② $2\sqrt{3}\,(2\sqrt{2}-1)$ ③ $2\sqrt{3}\,(3\sqrt{3}-1)$ ④ $2\sqrt{3}\,(\sqrt{2}-1)$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (7 punti) Sia f la funzione definita da $f(x) = (|x|-2)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 1$.
   (a) Determinarne il dominio, eventuali asintoti e simmetrie (pari/dispari).
   (b) Calcolare f' e determinarne il dominio. Individuare e classificare eventuali punti di non derivabilità.
   (c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e trovare i suoi punti di estremo. Stabilire il numero esatto di zeri di f.
   (d) Tracciare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni ricavate.

2. (5 punti) Data la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

   e i punti $P, Q \in \gamma$ che si ottengono rispettivamente per $t = 0$ e $t = 2\pi$,
   (a) scrivere l'equazione della retta r tangente a γ in P
   (b) scrivere l'equazione del piano ω osculatore a γ in Q
   (c) trovare la retta s passante per P, ortogonale a r e parallela a ω.

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (5 punti)
   (a) Dare la definizione di lunghezza del grafico di una funzione.
   (b) Enunciare e dimostrare il teorema della formula della lunghezza del grafico di una funzione.

2. (5 punti)
   (a) Dare la definizione di prodotto scalare tra due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Dare la definizione di angolo tra due vettori non nulli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
   (c) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

1. (a) La funzione è definita ovunque e quindi il suo dominio è $\mathbb{R}$. Inoltre è pari, poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(-x) = (|-x| - 2)\,\mathrm{e}^{-\frac{(-x)^2}{2}} + 1 = (|x| - 2)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 1 = f(x)\,.$$

Infine ammette l'asintoto orizzontale $y = 1$ per $x \to \pm\infty$, poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 + \lim_{x\to+\infty} (x-2)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 1\,.$$

(b) La funzione è derivabile ovunque tranne che in $x = 0$. Per $x \neq 0$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} (-x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{se } x > 0\,, \\ (x^2 + 2x - 1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

In particolare, poiché f è continua e

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1\,,$$

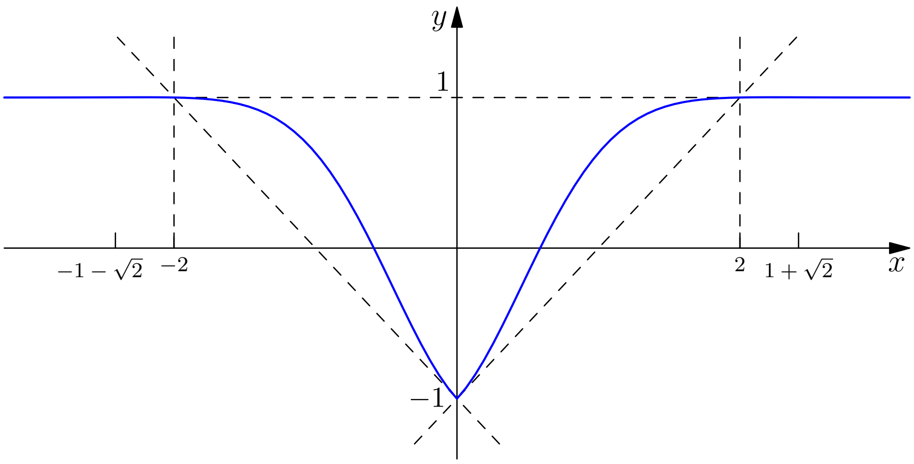
la funzione presenta un punto angoloso in $x = 0$.

(c) Per $x > 0$, il segno di f' equivale a quello di $-x^2+2x+1$. Gli zeri di tale polinomio sono $x_{1,2} = 1\pm\sqrt{2}$, di cui solo $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ è ammissibile. Perciò, per la simmetria di f, si ha

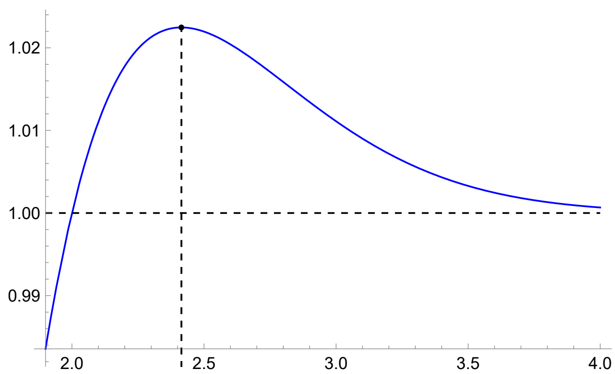
$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\text{in } \left(-\infty, -1-\sqrt{2}\right) \cup \left(0, 1+\sqrt{2}\right) \\ f'(x) < 0 \quad &\text{in } \left(-1-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(1+\sqrt{2}, +\infty\right). \end{aligned}$$

Quindi f è crescente nella prima unione di intervalli e decrescente nella seconda. Presenta due punti critici, in $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $-x_1 = -1 - \sqrt{2}$, che sono entrambi punti di massimo assoluto. Infine, in $x_0 = 0$ presenta un punto di minimo assoluto.
Dato che $f(0) = -1 < 0$, $f(x_1) > 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, e che f è strettamente crescente in $(0, x_1)$ e strettamente decrescente in $(x_1, +\infty)$, grazie al teorema degli zeri f ammette esattamente uno zero in $(0, +\infty)$, che si trova all'interno dell'intervallo $(0, x_1)$. Per simmetria, ammetterà esattamente uno zero anche in $(-\infty, 0)$, situato all'interno dell'intervallo $(-x_1, 0)$.

(d) Grafico qualitativo di f:



In particolare, in un intorno di $x_1 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.41421$, si ha



2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza γ, definita da $f(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$. Allora

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t)\,, \qquad f''(t) = (-\cos t, -\sin t, 2)\,.$$

Poiché $f'(t)= \sqrt{1+4t^2} \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la curva γ è regolare.

(a) Si ha $P = f(0) = (1, 0, 0)$ e $f'(0) = (0, 1, 0)$. Quindi

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Si ha $Q = f(2\pi) = (1, 0, 4\pi^2)$, $f'(2\pi) = (0, 1, 4\pi)$ e $f''(2\pi) = (-1, 0, 2)$. Un vettore normale a ω è

$$\mathbf{a} = f'(2\pi) \wedge f''(2\pi) = (0, 1, 4\pi) \wedge (-1, 0, 2) = (2, -4\pi, 1)\,,$$

Quindi $\omega \,:\, 2x - 4\pi y + z = 2 + 4\pi^2$.

(c) Un vettore direttore di s è $f'(0) \wedge \mathbf{a} = (1, 0, -2)$. Quindi, si ha

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -2t\,. \end{cases}$$