ANALISI E GEOMETRIA 1 *Seconda prova in itinere – 19 Gennaio 2024*

Cognome: ____________ **Matricola:** ____________

Nome: ____________ **Punteggio Totale:** ____________

Istruzioni: *Segnare le risposte che si ritengono corrette. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo: *1 ora e 15 minuti.*

QUESTIONARIO (6 punti, soglia sufficienza 3)

(Segnare le affermazioni corrette (◯ una sola, ☐ più di una). Ogni quesito vale un punto)

1. Il limite $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{2\cos x - \sqrt{3}}$ vale

① 0 ② $\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{3}$ ④ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ⑤ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

---

2. Sia $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Allora

[1] $F(x) = 2x + o(x)$ per $x \to 0$

[2] $F(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$

[3] $\lim_{x\to\pm\infty} F(x)$ esistono finiti

[4] F è crescente in $\mathbb{R}$

[5] F è decrescente in $\mathbb{R}$

[6] F non ha punti di estremo in $\mathbb{R}$

---

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La serie numerica $\sum_{n\ge1} \mathrm{e}^{-\alpha n}$ converge se e solo se

① $\alpha \neq 0$ ② $\alpha > 0$ ③ $\alpha \ge 0$ ④ $\alpha > 1$ ⑤ $\alpha \ge 1$

---

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La distanza del punto $P \equiv (1,1,1)$ dal piano $\pi : x + y + z = \alpha$ vale $\sqrt{3}$ se e solo se

① $\alpha = 0$ ② $\alpha = 6$ ③ $\alpha = -6$ ④ $\alpha \in \{0, 6\}$ ⑤ $\alpha \in \{0, -6\}$

---

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia π il piano passante per l'origine e per i punti $A \equiv (1,1,1)$ e $B \equiv (0,2,0)$. Il punto $P \equiv (1,0,\alpha)$ appartiene a π se e solo se

① $\alpha = -2$ ② $\alpha = -1$ ③ $\alpha = 0$ ④ $\alpha = 1$ ⑤ $\alpha = 2$

---

6. La lunghezza dell curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cos t \\ y = \mathrm{e}^t \sin t \\ z = \dfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}t} \end{cases} \qquad t \in [0, \ln 4]$$

è

① $3\sqrt{2}\,(2\sqrt{2} - 1)$ ② $2\sqrt{3}\,(2\sqrt{2} - 1)$ ③ $2\sqrt{3}\,(3\sqrt{3} - 1)$ ④ $2\sqrt{3}\,(\sqrt{2} - 1)$

Esercizio (6 punti, soglia sufficienza 3)

1. Data la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

e i punti $P, Q \in \gamma$ che si ottengono rispettivamente per $t = 0$ e $t = 2\pi$,

(a) mostrare che γ è regolare

(b) scrivere l'equazione della retta r tangente a γ in P

(c) scrivere l'equazione del piano ω osculatore a γ in Q

(d) trovare la retta s passante per P, ortogonale a r e parallela a ω.

Soluzione

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza γ, definita da $f(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$. Allora

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t), \qquad f''(t) = (-\cos t, -\sin t, 2).$$

(a) Poiché $f'(t) = \sqrt{1 + 4t^2} \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la curva γ è regolare.

(b) Si ha $P = f(0) = (1, 0, 0)$ e $f'(0) = (0, 1, 0)$. Quindi

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Si ha $Q = f(2\pi) = (1, 0, 4\pi^2)$, $f'(2\pi) = (0, 1, 4\pi)$ e $f''(2\pi) = (-1, 0, 2)$. Un vettore normale a ω è

$$\mathbf{a} = f'(2\pi) \wedge f''(2\pi) = (0, 1, 4\pi) \wedge (-1, 0, 2) = (2, -4\pi, 1),$$

Quindi $\omega : 2x - 4\pi y + z = 2 + 4\pi^2$.

(d) Un vettore direttore di s è $f'(0) \wedge \mathbf{a} = (1, 0, -2)$. Quindi, si ha

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -2t. \end{cases}$$

Teoria (6 punti, soglia sufficienza 3)

1. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della formula della lunghezza del grafico di una funzione.
2. (3 punti) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.