Analisi e Geometria 1 — *Primo appello – 9 Febbraio 2024*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni: *I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo: *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (10 punti, soglia sufficienza 5)

(Segnare le risposte corrette (◯ una sola, ☐ più di una). Ogni quesito vale un punto)

1. Il numero complesso $z = e^{\frac{\pi}{6}i} \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}$ è uguale a

① 1 ② $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ ③ $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$ ④ $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(2) = 8$. Sia a_n una successione reale tale che $a_n \to \sqrt{2}$ per $n \to +\infty$. Allora, il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{f(a_n^2)}$ vale

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ non esiste

3. Il limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)-x}{e^{2x}-1-2x}$ vale

① 0 ② $1/2$ ③ -2 ④ $-1/4$ ⑤ 4

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $I = [a, b]$, con $a < b$. Sia $f(I)$ l'immagine di I mediante f. Allora

- 1 $f(I)$ è un intervallo aperto
- 2 $f(I)$ è un intervallo chiuso
- 3 $f(I)$ è un intervallo limitato
- 4 $f(I)$ è un intervallo illimitato
- 5 $f(I)$ non è un intervallo

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = |x|\, x$. Allora

- 1 f è continua in $x_0 = 0$
- 2 f non è derivabile in $x_0 = 0$
- 3 f ha derivata prima continua in $x_0 = 0$
- 4 f è derivabile due volte in $x_0 = 0$
- 5 f ha un punto estremante in $x_0 = 0$

6. Il polinomio di Taylor del secondo ordine, centrato in $x_0 = 1$, della funzione $f(x) = x \cos \pi x$ è

① $1 + (x-1) + \dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2$

② $-1 - (x-1) + \dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2$

③ $1 - (x-1) - \dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2$

④ $-1 - (x-1) - \dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2$

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge se e solo se

① per ogni α ② $0 < \alpha < 1$ ③ $1 < \alpha < 2$ ④ $1 < \alpha < 3$ ⑤ $2 < \alpha < 3$

---

8. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

① è irregolare
② diverge a $+\infty$
③ diverge a $-\infty$
④ converge semplicemente, ma non assolutamente
⑤ converge assolutamente

---

9. I due vettori $\mathbf{x} = (1,0,1)$ e $\mathbf{y} = (2,2,1)$ di $\mathbb{R}^3$ formano un angolo

① $\theta = 0$ ② $\theta = \frac{\pi}{2}$ ③ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ④ $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\theta = \frac{\pi}{3}$

---

10. La proiezione ortogonale del punto $P \equiv (2,-3,1)$ sulla retta $r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1-2t \end{cases}$ è il punto

① $(1,2,1)$ ② $(0,3,3)$ ③ $(2,1,-1)$ ④ $(3,0,-3)$ ⑤ $(-1,4,5)$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (7 punti) Sia f la funzione definita da $f(x) = \operatorname{artg}\frac{1}{x^2} + \log(1+x^2)$.
   (a) Determinare il dominio, il segno e le eventuali simmetrie di f. Calcolare poi i limiti di f al bordo del dominio e determinare gli eventuali asintoti.
   (b) Calcolare f' e determinarne il dominio.
   (c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e trovare i suoi punti di estremo.
   (d) Stabilire se f può essere estesa a una funzione F continua su tutto $\mathbb{R}$. In caso affermativo, stabilire se F è anche derivabile su tutto $\mathbb{R}$.
   (e) Tracciare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni ricavate.

2. (5 punti) Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = 2t - t^2 \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   (a) Mostrare che γ è piana trovando il piano che la contiene.
   (b) Mostrare che γ è una curva biregolare.
   (c) Determinare i versori della terna intrinseca di γ nel punto P corrispondente a $t = 1$.
   (d) Calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_{\gamma^*} (1-z)\,\mathrm{d}s$$

   dove γ^* è l'arco della curva γ che si ottiene per $t \in [0,1]$.

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (6 punti)
   (a) Dare la definizione di polinomio di Taylor.
   (b) Enunciare e dimostrare il teorema della formula di Taylor con resto secondo Peano.

2. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale generalizzato.