Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 *Primo appello – 9 Febbraio 2024*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni: *I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo: *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (10 punti, soglia sufficienza 5)

(Segnare le risposte corrette (◯ una sola, ☐ più di una). Ogni quesito vale un punto)

1. Il numero complesso $z = e^{\frac{\pi}{6}i} \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}$ è uguale a

① 1 ② $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ ③ $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$ ④ $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

---

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(2) = 8$. Sia a_n una successione reale tale che $a_n \to \sqrt{2}$ per $n \to +\infty$. Allora, il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{f(a_n^2)}$ vale

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ non esiste

---

3. Il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)-x}{e^{2x}-1-2x}$ vale

① 0 ② $1/2$ ③ -2 ④ $-1/4$ ⑤ 4

---

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $I = [a,b]$, con $a < b$. Sia $f(I)$ l'immagine di I mediante f. Allora

1. $f(I)$ è un intervallo aperto
2. $f(I)$ è un intervallo chiuso
3. $f(I)$ è un intervallo limitato
4. $f(I)$ è un intervallo illimitato
5. $f(I)$ non è un intervallo

---

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = |x|\,x$. Allora

1. f è continua in $x_0 = 0$
2. f non è derivabile in $x_0 = 0$
3. f ha derivata prima continua in $x_0 = 0$
4. f è derivabile due volte in $x_0 = 0$
5. f ha un punto estremante in $x_0 = 0$

---

6. Il polinomio di Taylor del secondo ordine, centrato in $x_0 = 1$, della funzione $f(x) = x\cos\pi x$ è

① $1 + (x-1) + \dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2$

② $-1 - (x-1) + \dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2$

③ $1 - (x-1) - \dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2$

④ $-1 - (x-1) - \dfrac{\pi^2}{2}(x-1)^2$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge se e solo se

① per ogni α ② $0<\alpha<1$ ③ $1<\alpha<2$ ✓ $1<\alpha<3$ ⑤ $2<\alpha<3$

---

8. La serie numerica $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

① è irregolare
② diverge a $+\infty$
③ diverge a $-\infty$
✓ converge semplicemente, ma non assolutamente
⑤ converge assolutamente

---

9. I due vettori $\mathbf{x}=(1,0,1)$ e $\mathbf{y}=(2,2,1)$ di $\mathbb{R}^3$ formano un angolo

① $\theta=0$ ② $\theta=\frac{\pi}{2}$ ✓ $\theta=\frac{\pi}{4}$ ④ $\theta=-\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\theta=\frac{\pi}{3}$

---

10. La proiezione ortogonale del punto $P\equiv(2,-3,1)$ sulla retta $r:\begin{cases} x=1+t\\ y=2-t\\ z=1-2t\end{cases}$ è il punto

① $(1,2,1)$ ② $(0,3,3)$ ✓ $(2,1,-1)$ ④ $(3,0,-3)$ ⑤ $(-1,4,5)$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (7 punti) Sia f la funzione definita da $f(x)=\operatorname{artg}\dfrac{1}{x^2}+\log(1+x^2)$.

   (a) Determinare il dominio, il segno e le eventuali simmetrie di f. Calcolare poi i limiti di f al bordo del dominio e determinare gli eventuali asintoti.

   (b) Calcolare f' e determinarne il dominio.

   (c) Determinare gli intervalli di monotonia di f e trovare i suoi punti di estremo.

   (d) Stabilire se f può essere estesa a una funzione F continua su tutto $\mathbb{R}$. In caso affermativo, stabilire se F è anche derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

   (e) Tracciare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni ricavate.

2. (5 punti) Si consideri la curva

$$\gamma:\begin{cases} x=2t+t^2\\ y=2t-t^2\\ z=1-2t\end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

   (a) Mostrare che γ è piana trovando il piano che la contiene.

   (b) Mostrare che γ è una curva biregolare.

   (c) Determinare i versori della terna intrinseca di γ nel punto P corrispondente a $t=1$.

   (d) Calcolare l'integrale di linea

$$I=\int_{\gamma^*}(1-z)\,\mathrm{d}s$$

   dove γ^* è l'arco della curva γ che si ottiene per $t\in[0,1]$.

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (6 punti)

   (a) Dare la definizione di polinomio di Taylor.

   (b) Enunciare e dimostrare il teorema della formula di Taylor con resto secondo Peano.

2. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale generalizzato.

1. (a) La funzione è definita per $x \neq 0$ e quindi il suo dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La funzione è sempre positiva ed è pari. Inoltre, si hanno i limiti

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,.$$

Pertanto, la funzione f non possiede asintoti.

(b) La funzione è derivabile su tutto D. Per $x \neq 0$, si ha

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}\,\frac{1}{1+1/x^4} + \frac{2x}{1+x^2} = -\frac{2x}{1+x^4} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x^3(x^2-1)}{(1+x^4)(1+x^2)}\,.$$

(c) Si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x(x^1-1) \geq 0$. Pertanto, si ha

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 0 & \text{sse } x = \pm 1 & \\ f'(x) > 0 & \text{in } (-1,0)\cup(1,+\infty) & (f \text{ crescente}) \\ f'(x) < 0 & \text{in } (-\infty,-1)\cup(0,1) & (f \text{ decrescente})\,. \end{array}$$

Quindi f possiede due punti di minimo (assoluto) in $x_{1,2} = \pm 1$. Il valore assunto in questi punti è $\frac{\pi}{4} + \log 2 \approx 1.47855$.

(d) Poiché

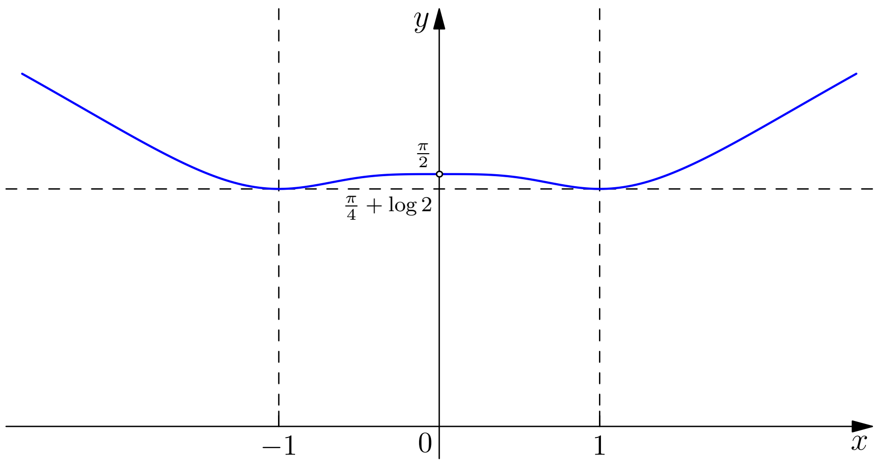
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to 0} f'(x) = 0\,,$$

la funzione f può essere estesa ad una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, definita da

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

In particolare, la funzione F presenta un punto di massimo in $x = 0$.

(e) Grafico qualitativo di f:



2. (a) Dalle prime due equazioni, si ha $x + y = 4t$. Sostituendo nella terza equazione, si ha $2z = 2 - x - y$. Quindi, la curva γ è contenuta nel piano di equazione $x + y + 2z = 2$.

(b) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza γ, definita da $f(t) = (2t + t^2, 2t - t^2, 1 - 2t)$. Allora, la funzione f è derivabile due volte e

$$f'(t) = (2+2t, 2-2t, -2)\,, \qquad f''(t) = (2,-2,0)\,, \qquad f'(t)\wedge f''(t) = -4(1,1,2)\,.$$

Poiché $f'(t)\wedge f''(t) \neq \mathbf{0}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la curva γ è biregolare.

(c) Per $t = 1$, si ha $f'(1) = (4,0,-2)$, $f''(1) = (2,-2,0)$, $f'(1)\wedge f''(1) = -4(1,1,2)$. Quindi, si ha

$$\mathbf{t}(1) = \frac{f'(1)}{\|f'(1)\|} = \frac{(2,0,-1)}{\sqrt{5}}\,, \qquad \mathbf{b}(1) = \frac{f'(1)\wedge f''(1)}{\|f'(1)\wedge f''(1)\|} = \frac{(-1,-1,-2)}{\sqrt{6}}\,.$$

Infine, si ha

$$\mathbf{n}(1) = \mathbf{b}(1)\wedge\mathbf{t}(1) = \frac{(1,-5,2)}{\sqrt{30}}\,.$$

(d) Si ha $\|f'(t)\| = 2\sqrt{3+2t^2}$. Quindi

$$I = \int_0^1 4t\,\sqrt{3+2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{10}{3}\,\sqrt{5} - 2\sqrt{3}\,.$$