ANALISI E GEOMETRIA 1 *Secondo appello – 14 Giugno 2024*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

Istruzioni: *I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo: *2 ore e 15 minuti.*

QUESTIONARIO (10 punti, soglia sufficienza 5)

(Segnare le risposte corrette (◯ una sola, ☐ più di una). Ogni quesito vale un punto)

1. Nel campo dei numeri complessi, l'equazione $z^2 + z\overline{z} = 1 - 2\mathrm{i}$

   ① non ammette soluzioni
   ② ammette un'unica soluzione
   ③ ammette esattamente due soluzioni
   ④ ammette esattamente quattro soluzioni
   ⑤ ammette infinite soluzioni

---

2. Sia S l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^3 = (1+\mathrm{i})^{12}$ in $\mathbb{C}$.

   [1] Se $z_0 \in S$, allora $\overline{z}_0 \in S$
   [2] Se $z_0 \in S$, allora $-z_0 \in S$
   [3] Se $z_0 \in S$, allora $\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} \cdot z_0 \in S$
   [4] $z = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ è una soluzione
   [5] $z = 2$ è una soluzione

---

3. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione dove $a_n = \frac{1}{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Sia $A = \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Allora

   ① $\max A$ non esiste
   ② $\min A$ non esiste
   ③ $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf A$
   ④ $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$
   ⑤ A è limitato
   ⑥ A è illimitato

---

4. Sia $a \in \mathbb{R}$. La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, definita da $f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-2)}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ \dfrac{\ln^2(x-1)}{x-2} + 2x + a & \text{se } x > 2, \end{cases}$

   può essere prolungata con continuità su tutto $\mathbb{R}$

   ① per ogni valore di a
   ② per nessun valore di a
   ③ se e solo se $a = \pm 1$
   ④ se e solo se $a = 2$
   ⑤ se e solo se $a = -3$
   ⑥ se e solo se $a = \pm 4$

---

5. Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$. Allora

   ① f è identicamente nulla in un intorno di 0
   ② $f(0) \neq 0$
   ③ f è derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = 1$
   ④ f è derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = 0$

---

6. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) + \cos(\sqrt{2}\cdot x) - 1}{x^4}$ vale

   ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ 1 ⑤ $+\infty$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin^\alpha \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge se e solo se

① $\alpha < \frac{1}{2}$ ② $\alpha > \frac{1}{2}$ ③ $\alpha < 2$ ④ $\alpha > 2$ ⑤ $\alpha < 1$

---

8. Quali delle seguenti serie convergono?

[1] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{(k+1)^2}$ [2] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+1}{k(k+1)}$ [3] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k}$ [4] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\frac{1}{k}$

---

9. Sia $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$. Allora

[1] f è iniettiva

[2] f è suriettiva

[3] $f(\mathbf{x}) \geq 0$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

[4] $f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \geq 0$, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$

[5] $f(\mathbf{x}) = 0$ per infiniti vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

[6] $f(\mathbf{x}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

---

10. Sia $I = \displaystyle\int_\gamma xz\,\mathrm{d}s$, dove $\gamma : \begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 4t \\ z = -3\cos t \end{cases}$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Allora

① $I = 0$ ② $I = \frac{45}{4}$ ③ $I = -\frac{45}{4}$ ④ $I = -\frac{45}{2}$ ⑤ $I = \frac{45}{2}$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (7 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi e^x) & x < 0 \\ (2x-1)\,e^{-x^2} & x \geq 0\,. \end{cases}$$

   (a) Studiare la continuità di f sul suo dominio, calcolare i limiti di f agli estremi del dominio e determinare la presenza di eventuali asintoti orizzontali, verticali od obliqui.
   (b) Trovare il dominio della derivata di f classificando eventuali punti di non derivabilità. Calcolare esplicitamente la derivata di f ove possibile.
   (c) Studiare gli intervalli di monotonia per f, calcolare esplicitamente eventuali punti di estremo locale o globale. Determinare il numero esatto di zeri di f (giustificando la risposta) e, se possibile, trovarli esplicitamente.
   (d) Tracciare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni ricavate.
   (e) Dire se l'area sotto il grafico di f per $x \geq 1$ è finita o infinita.

2. (5 punti)
   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π in $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $P \equiv (2,1,0)$, $Q \equiv (1,1,1)$ ed $R \equiv (-1,0,3)$.
   (b) Verificare che la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = (\cos t - 1)^2 + (\sin t + 1)^2 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

   è piana e trovare il piano π' che la contiene.
   (c) Dire se i due piani π e π' sono ortogonali.

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (4 punti) Scrivere, e dimostrare, la disuguaglianza triangolare per i numeri complessi.
2. (2 punti) Enunciare il criterio integrale per le serie numeriche.
3. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della media per le curve.