ANALISI E GEOMETRIA 1 *Secondo appello – 14 Giugno 2024*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni: *I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo: *2 ore e 15 minuti.*

QUESTIONARIO (10 punti, soglia sufficienza 5)

(Segnare le risposte corrette (◯ una sola, ☐ più di una). Ogni quesito vale un punto)

1. Nel campo dei numeri complessi, l'equazione $z^2 + z\overline{z} = 1 - 2\mathrm{i}$

① non ammette soluzioni
② ammette un'unica soluzione
③ ✓ ammette esattamente due soluzioni
④ ammette esattamente quattro soluzioni
⑤ ammette infinite soluzioni

---

2. Sia S l'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^3 = (1+\mathrm{i})^{12}$ in $\mathbb{C}$.

[1] ✓ Se $z_0 \in S$, allora $\overline{z}_0 \in S$
[2] Se $z_0 \in S$, allora $-z_0 \in S$
[3] ✓ Se $z_0 \in S$, allora $\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} \cdot z_0 \in S$
[4] $z = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ è una soluzione
[5] $z = 2$ è una soluzione

---

3. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione dove $a_n = \frac{1}{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Sia $A = \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Allora

① $\max A$ non esiste
② $\min A$ non esiste
③ $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf A$
④ $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$
⑤ ✓ A è limitato
⑥ A è illimitato

---

4. Sia $a \in \mathbb{R}$. La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, definita da $f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-2)}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ \dfrac{\ln^2(x-1)}{x-2} + 2x + a & \text{se } x > 2, \end{cases}$

può essere prolungata con continuità su tutto $\mathbb{R}$

① per ogni valore di a
② per nessun valore di a
③ se e solo se $a = \pm 1$
④ se e solo se $a = 2$
⑤ ✓ se e solo se $a = -3$
⑥ se e solo se $a = \pm 4$

---

5. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$. Allora

① f è identicamente nulla in un intorno di 0
② $f(0) \neq 0$
③ f è derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = 1$
④ ✓ f è derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = 0$

---

6. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) + \cos(\sqrt{2}\cdot x) - 1}{x^4}$ vale

① $\frac{1}{2}$
② $\frac{1}{3}$
③ ✓ $\frac{1}{6}$
④ 1
⑤ $+\infty$

---

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin^\alpha \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge se e solo se

① $\alpha < \frac{1}{2}$ ② $\alpha > \frac{1}{2}$ ③ $\alpha < 2$ ④ $\alpha > 2$ ⑤ $\alpha < 1$

---

8. Quali delle seguenti serie convergono?

[1] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{(k+1)^2}$ [2] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+1}{k(k+1)}$ [3] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k}$ [4] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\frac{1}{k}$

---

9. Sia $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$. Allora

[1] f è iniettiva

[2] f è suriettiva

[3] $f(\mathbf{x}) \geq 0$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

[4] $f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \geq 0$, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$

[5] $f(\mathbf{x}) = 0$ per infiniti vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

[6] $f(\mathbf{x}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

---

10. Sia $I = \displaystyle\int_\gamma xz\,\mathrm{d}s$, dove $\gamma : \begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 4t \\ z = -3\cos t \end{cases}$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Allora

① $I = 0$ ② $I = \frac{45}{4}$ ③ $I = -\frac{45}{4}$ ④ $I = -\frac{45}{2}$ ⑤ $I = \frac{45}{2}$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (7 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi e^x) & x < 0 \\ (2x-1)\,e^{-x^2} & x \geq 0\,. \end{cases}$$

(a) Studiare la continuità di f sul suo dominio, calcolare i limiti di f agli estremi del dominio e determinare la presenza di eventuali asintoti orizzontali, verticali od obliqui.

(b) Trovare il dominio della derivata di f classificando eventuali punti di non derivabilità. Calcolare esplicitamente la derivata di f ove possibile.

(c) Studiare gli intervalli di monotonia per f, calcolare esplicitamente eventuali punti di estremo locale o globale. Determinare il numero esatto di zeri di f (giustificando la risposta) e, se possibile, trovarli esplicitamente.

(d) Tracciare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni ricavate.

(e) Dire se l'area sotto il grafico di f per $x \geq 1$ è finita o infinita.

2. (5 punti)

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π in $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $P \equiv (2,1,0)$, $Q \equiv (1,1,1)$ ed $R \equiv (-1,0,3)$.

(b) Verificare che la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = (\cos t - 1)^2 + (\sin t + 1)^2 \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

è piana e trovare il piano π' che la contiene.

(c) Dire se i due piani π e π' sono ortogonali.

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (4 punti) Scrivere, e dimostrare, la disuguaglianza triangolare per i numeri complessi.

2. (2 punti) Enunciare il criterio integrale per le serie numeriche.

3. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema della media per le curve.

1. (a) La funzione $g(x) = \cos(\pi e^x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi in particolare lo è per $x < 0$. La funzione $h(x) = (2x-1)e^{-x^2}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi in particolare lo è per $x > 0$. Resta da verificare che la funzione f definita a tratti sia continua nel punto di giunzione $x = 0$. Dato che

$$\lim_{x\to 0^-} \cos(\pi e^x) = \lim_{x\to 0^+} (2x-1)e^{-x^2} = -1 = f(0),$$

si ha che f è continua anche in 0. Pertanto, f è continua su tutto $\mathbb{R}$. Calcoliamo ora i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \cos(\pi e^x) = 1$$

(dato che πe^x tende a zero e la funzione coseno è continua) e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{e^{x^2}} = 0$$

(dove la forma di indecisione viene risolta ricordando la gerarchia degli infiniti o applicando de l'Hôpital). Pertanto $y = 1$ è un asintoto orizzontale sinistro per f, mentre $y = 0$ è un asintoto orizzontale destro per f. Non ci sono asintoti verticali né asintoti obliqui.

(b) La funzione f è sicuramente derivabile per ogni $x < 0$ e per ogni $x > 0$. Per $x < 0$, applicando la regola di derivazione della funzione composta si ha che

$$f'(x) = -\pi e^x \sin(\pi e^x),$$

mentre per $x > 0$ le regole di derivazione del prodotto e della funzione composta implicano che

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{-x^2} + (2x-1)\cdot(-2x)e^{-x^2} \\ &= (2+2x-4x^2)e^{-x^2} = -2(2x+1)(x-1)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Dato che

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\pi e^x \sin(\pi e^x) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2+2x-4x^2)e^{-x^2} = 2,$$

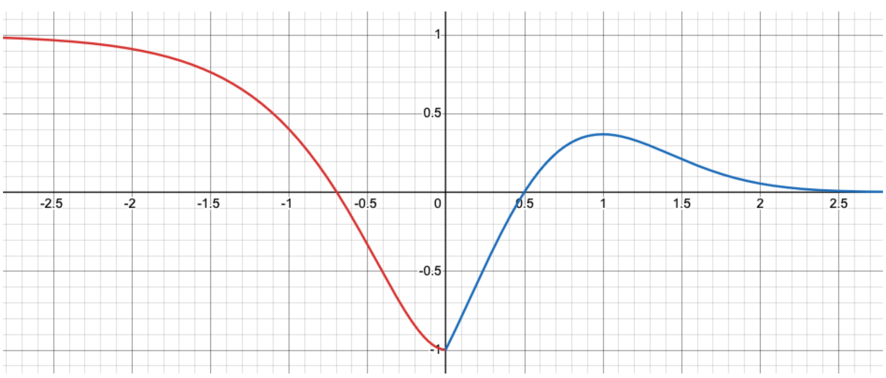
si ha che 0 è un punto angoloso per f: in particolare, f non è derivabile in 0. Il dominio della derivata di f è quindi $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(c) Sfruttando la crescenza stretta della funzione πe^x, si ha che $0 < \pi e^x < \pi$ per ogni $x \in (-\infty, 0)$. Pertanto, per ogni $x < 0$, si ha che $\sin(\pi e^x) > 0$ e quindi la derivata $f'(x) = -\pi e^x \sin(\pi e^x)$ assume valori strettamente minori di zero per ogni $x < 0$. La funzione f è quindi strettamente decrescente su $(-\infty, 0)$.

Studiamo ora il segno della derivata per $x > 0$. Dato che per $x > 0$ si ha che $f'(x) = -2(2x+1)(x-1)e^{-x^2}$, abbiamo che la derivata si annulla in 1 (lo zero $x = -\frac{1}{2}$ non è accettabile), è positiva su $(0,1)$ e negativa su $(1,+\infty)$. La funzione f è quindi strettamente crescente su $(0,1)$ e strettamente decrescente su $(1,+\infty)$. Dato che $f(1) = \frac{1}{e} < 1$, $x = 1$ è un punto di massimo locale ma non globale per f. Inoltre, a causa della continuità di f, $x = 0$ è un punto di minimo per f (nonostante f non sia derivabile in 0!). Dato che $f(0) = -1 < 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, $x = 0$ è un punto di minimo globale per f.

Determiniamo ora gli zeri di f. Per $x \geq 0$, $f(x) = (2x-1)e^{-x^2}$ si annulla unicamente in $x = \frac{1}{2}$ (dato che l'esponenziale non si annulla mai). Per $x < 0$, abbiamo visto in precedenza che $0 < \pi e^x < \pi$; pertanto, $f(x) = \cos(\pi e^x)$ si annulla se e solo se $\pi e^x = \frac{\pi}{2}$, cioè quando $x = -\log(2)$. La funzione f ha quindi esattamente due zeri.

(d) Grafico:



(e) Si noti che $f(x) = (2x-1)e^{-x^2}$ assume valori positivi su $(1, +\infty)$. Dato che $(2x-1)e^{-x^2} < 2x \cdot e^{-x^2}$, se l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} 2x \cdot e^{-x^2} \mathrm{d}x$ converge, allora deve convergere anche $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Dato che

$$\int_1^{+\infty} 2x \cdot e^{-x^2} \mathrm{d}x = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M 2x \cdot e^{-x^2} \mathrm{d}x = \lim_{M \to +\infty} [-e^{-x^2}]_1^M = \frac{1}{e} < +\infty,$$

si ha che l'area sotto il grafico di f per $x \geq 1$ è finita.

2. (a) Il piano π (con vettore normale $\vec{n}$) contiene i vettori $\overrightarrow{RQ} = (2, 1, -2)$ e $\overrightarrow{PQ} = (-1, 0, 1)$, pertanto $\vec{n}$ deve essere ortogonale sia a $\overrightarrow{RQ}$ che a $\overrightarrow{PQ}$. Una possibile scelta per $\vec{n}$ è quindi fornita dal prodotto vettoriale $\overrightarrow{RQ} \times \overrightarrow{PQ}$, da cui segue che $\vec{n} = (1, 0, 1)$ e π ha equazione $x + z = k$ per un certo $k \in \mathbb{R}$. Per determinare quale sia il valore corretto di k, imponiamo il passaggio per $P = (2, 1, 0)$, ottenendo che $k = 2$. L'equazione cartesiana di π è quindi $x + z = 2$.

(b) Dato che $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha che

$$\begin{aligned} z(t) &= (\cos(t) - 1)^2 + (\sin(t) + 1)^2 \\ &= \cos^2(t) - 2\cos(t) + 1 + \sin^2(t) + 2\sin(t) + 1 \\ &= -2\cos(t) + 2\sin(t) + 3 \\ &= -2x(t) + 2y(t) + 3. \end{aligned}$$

Pertanto, il supporto della curva γ è interamente contenuto nel piano π' di equazione cartesiana $2x - 2y + z = 3$.

(c) Si calcola che $(1, 0, 1) \cdot (2, -2, 1) = 3 \neq 0$, allora i due piani non sono ortogonali.