Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 — *Terzo appello – 5 Luglio 2024*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni: *I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo: *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (10 punti, soglia sufficienza 5)

(Segnare le risposte corrette (◯ una sola, ☐ più di una). Ogni quesito vale un punto)

1. Dato l'insieme $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \sin \dfrac{\pi}{x-2} = 0 \right\}$, allora

- ✓ A è un insieme limitato
- ② $\max A$ non esiste
- ③ $\min A = 0$
- ④ $\sup A \neq \max A$
- ⑤ $\inf A \neq \min A$

---

2. Sia $A = \{ z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}\,(z^2) = 0, \ |z| = \sqrt{2} \}$. Allora

- ① $A = \varnothing$
- ② $A \subseteq \mathbb{R}$
- ③ A è dato da due rette perpendicolari
- ④ A è dato da una circonferenza di raggio $\sqrt{2}$
- ✓ A è dato dai vertici di un quadrato di lato 2

---

3. Il limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \log \frac{1+x^2}{2x+x^2}$ vale

- ① 0
- ② -1
- ③ $1/2$
- ✓ -2
- ⑤ $+\infty$

---

4. Siano f e g due funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ tali che $f \sim g$ per $x \to +\infty$. Allora, per $x \to +\infty$,

- [1] $f(x) = o(g(x))$
- [2] $f(x) = g(x) + o(x)$
- [✓] $f(x) = g(x) + o(g(x))$
- [✓] se $f \sim x$, allora $g \sim x$
- [5] $e^{f(x)} \sim e^{g(x)}$

---

5. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e pari. Allora, si ha

- [1] $f(0) = 0$;
- [2] f ha massimo e minimo in $(-1, 1)$
- [✓] $\displaystyle\int_{-1}^{1} x f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- [✓] $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
- [5] $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ esiste finito

---

6. Sia $a \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x - 1 + \cos\sqrt{2x}}{x^{3a}}\,\mathrm{d}x$ converge

- ① per ogni valore di a
- ② per nessun valore di a
- ③ se e solo se $\dfrac{2}{3} < a < 1$
- ✓ se e solo se $a < 1$
- ⑤ se e solo se $a > \dfrac{3}{4}$
- ⑥ se e solo se $a < \dfrac{1}{3}$

---

7. L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $F(x) = 3 + \int_4^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$ nel punto di ascissa $x = 2$ è

① $y = 3$ ③ $y = 3 - \frac{e}{2}(x-2)$ ⑤ $y = 3 + \frac{e^4}{2}(x-2)$

② $y = 3 - \frac{\sqrt{e}}{2}(x-2)$ ④ $y = 3 - \frac{e^2}{2}(x-2)$

---

8. La somma della serie $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ è

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 1/3 ⑤ 2/3

---

9. La distanza del punto $P \equiv (4, 1, -5)$ dal piano $\pi : x - 2y - 3 = 0$ è

① 0 ② 2 ③ $1/\sqrt{3}$ ④ $1/\sqrt{5}$ ⑤ 5

---

10. Sia $I = \int_\gamma f\,ds$ l'integrale curvilineo dove $f(x,y) = \frac{xy}{1+y^2}$ e $\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ con $t \in [0, \pi/2]$. Allora

① $I = 0$ ② $I = \frac{1}{2}$ ③ $I = \frac{1}{2}\log 2$ ④ $I = 2\log 2$ ⑤ $I = 2\log\frac{1}{2}$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (7 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}\,.$$
   (a) Determinare gli zeri e il segno della funzione f.
   (b) Studiare i limiti al bordo del dominio e determinare la presenza di eventuali asintoti.
   (c) Calcolare f', determinandone l'insieme di definizione. Studiare poi i punti di non derivabilità di f.
   (d) Studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti estremanti.
   (e) Tracciare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni ricavate.

2. (5 punti) Si consideri la curva
$$\gamma : \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ z = t^2 - 1 \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi]\,.$$
   (a) Stabilire se γ è regolare, semplice, chiusa.
   (b) Trovare il piano osculatore nel punto P che si ottiene per $t = 0$.
   (c) Stabilire se γ è una curva piana.
   (d) Trovare i punti Q della curva in cui la retta tangente a γ in Q è ortogonale alla retta tangente in P a γ.

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del limite di successioni.
2. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema relativo alla lunghezza del grafico di una funzione.
3. (a) (1 punti) Dare la definizione di curva biregolare.
   (b) (2 punti) Definire la terna intrinseca di una curva.

1. (a) Il dominio di f è $D_f = \mathbb{R}$, f si annulla in $x = 0$ e in $x = 1$, è positiva per $x > 1$ ed è negativa per $x < 0 \vee 0 < x < 1$.

   (b) Per $x \to \pm\infty$ si ha $f(x) \sim x$. Poiché la stima asintotica è lineare, potrebbe esistere un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$. Poiché per $x \to \pm\infty$ si ha

$$f(x) - x = \sqrt[3]{x^3 - x^2} - x = x\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - 1\right) \sim x\left(-\frac{1}{3x}\right) = -\frac{1}{3},$$

   allora la retta $y = x - \dfrac{1}{3}$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

   (c) Per $x \to 0^\pm$ si ha $f(x) \sim -\sqrt[3]{x^2}$. Pertanto f non è derivabile in $x = 0$ (punto di cuspide).
   Per $x \to 1$ si ha $f(x) \sim \sqrt[3]{(x-1)}$. Pertanto f non è derivabile in $x = 1$ (punto di flesso a tangente verticale).

   (d) In $D'_f = D_f \setminus \{0, 1\}$ la funzione è derivabile in quanto composta di funzioni derivabili. Per $x \in D'_f$ si ha

$$f'(x) = \frac{3x - 2}{3\sqrt[3]{x}(x-1)^{2/3}}$$

   Punti stazionari:

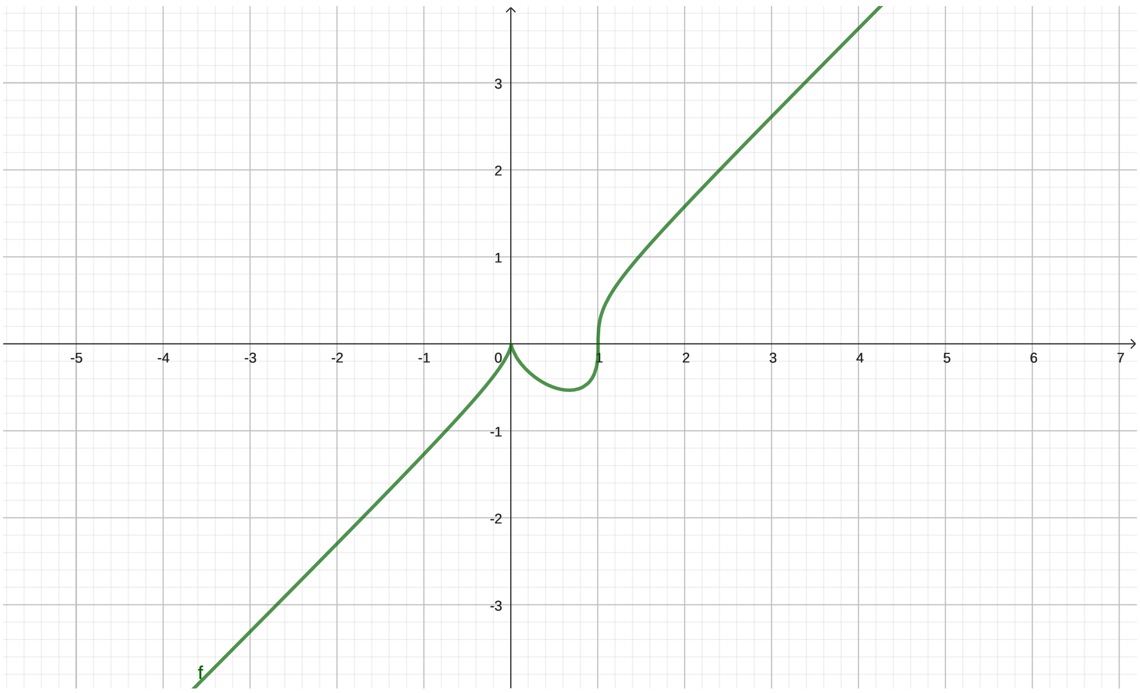
$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3}.$$

   Applicando il Test di Monotonia f è crescente per $x \in (-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$, decrescente per $x \in (0, 2/3)$ e quindi $x = 2/3$ è un punto di minimo locale. Inoltre, per $x = 0$ si ha un punto di massimo locale.
   Infine, poiché

$$\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = \mp\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1} f'(x) = +\infty,$$

   si ha che $x = 0$ è un punto di cuspide (come già osservato) e che $x = 1$ è un punto di flesso a tangente verticale.

   (e) Grafico.



2. (a) Le componenti di γ sono funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$, inoltre la terza componente di $\gamma'(t)$ è $2t$ che si annulla solo in $t = 0$; in tal caso non è nulla la seconda componente, perciò $\gamma'(t)$ non è mai nullo e γ è regolare. Inoltre, γ è chiusa e quindi non può essere semplice. (Tuttavia, la curva è semplice se consideriamo $t \in (-\pi, \pi)$. Infatti, affinchè sia $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ (con $t_1 \neq t_2$) deve essere $t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1$, ossia $t_2 = -t_1$; inoltre deve anche essere $\sin(t_1) = \sin(-t_1)$, da cui $t_1 = k\pi$; ne segue che γ è semplice, poichè l'unica autointersezione è sul bordo dell'intervallo della parametrizzazione).

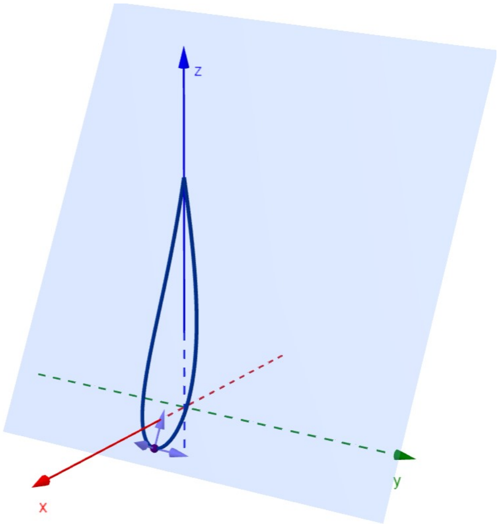


Figura 1: La curva γ.

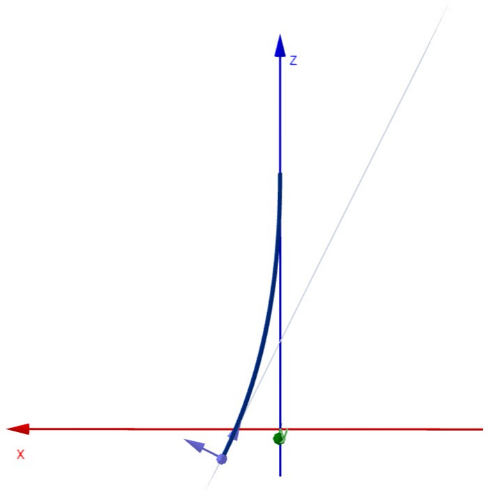


Figura 2: Proiezione nel piano xz.

(b) Il punto $\gamma(0)$ è $(2, 0, -1)$. Si ha poi $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 2t)$, $\gamma''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 2)$, e dunque $\gamma'(0) = (0, 1, 0)$, $\gamma''(0) = (-1, 0, 2)$. Il versore binormale, che è perpendicolare al piano osculatore, ha la stessa direzione di $\gamma'(0) \wedge \gamma''(0) = (2, 0, 1)$, quindi il piano osculatore ha equazione cartesiana $(x - 2, y, z + 1) \cdot (2, 0, 1) = 0$, ovvero $2x + z = 3$ (vedi figure).

(c) Se γ fosse piana, sarebbe tutta contenuta nel piano osculatore: poiché sostituendo le componenti di γ nell'equazione del piano trovato prima non si ha un'identità, γ non è piana.

(d) La retta tangente in $\gamma(0)$ è parallela al vettore $\gamma'(0) = (0, 1, 0)$, i punti cercati sono i punti $\gamma(t)$ tali che $\gamma'(t) \cdot \gamma'(0) = 0$, ovvero $\cos(t) = 0$: poiché $t \in [-\pi, \pi]$ i punti cercati sono $\gamma(\pi/2) = (1, 1, \pi^2/4 - 1)$ e $\gamma(-\pi/2) = (1, -1, \pi^2/4 - 1)$.