Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi e Geometria 1 — *Quarto appello – 9 Settembre 2024*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________ **Punteggio Totale:** ____________________

Istruzioni: *I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo: *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (10 punti, soglia sufficienza 5)

(Segnare le risposte corrette (◯ una sola, ☐ più di una). Ogni quesito vale un punto)

1. Sia $I_n = \left[-1 - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $I = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} I_n$. Allora

① $I = \varnothing$ ② $I = \{0\}$ ③ $I = \{-1, 1\}$ ④ $I = (-1, 1)$ ⑤ $I = [-1, 1]$

---

2. In $\mathbb{C}$, le equazioni $z^{10} = (1+\mathrm{i})^5$ e $z^2 = 1 + \mathrm{i}$

① hanno esattamente lo stesso numero di soluzioni
② hanno esattamente le stesse soluzioni
③ hanno un numero diverso di soluzioni
④ hanno solo soluzioni puramente reali
⑤ hanno solo soluzioni puramente immaginarie

---

3. Si consideri l'equazione $z^3 = -\mathrm{i}$, in $\mathbb{C}$. Se z_0 è una soluzione, allora

① anche $\overline{z_0}$ è una soluzione ② anche $-\overline{z_0}$ è una soluzione ③ $\operatorname{Re} z_0 = 0$ ④ $\operatorname{Im} z_0 = 0$ ⑤ $\operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Im} z_0$

---

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x} - \sin x$. Allora

☐1 f è limitata ☐2 f è illimitata ☐3 f è periodica ☐4 f non è periodica ☐5 $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ☐6 $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

---

5. Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(2x) - \sin(2x^2)}{x^4}$ vale

① 0 ② 1 ③ $\frac{1}{6}$ ④ $-\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{2}{3}$ ⑥ $-\frac{2}{3}$

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$, dove $\alpha > 0$. Allora in $x = 0$

☐1 f è continua se e solo se $\alpha > 0$
☐2 f è continua se e solo se $\alpha > 1$
☐3 f non è mai continua
☐4 f è derivabile se e solo se $\alpha > 0$
☐5 f è derivabile se e solo se $\alpha > 1$
☐6 f non è mai derivabile

---

7. L'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$ vale

① 0 ② $\pi/4$ ③ $\pi/2$ ④ $1/4$ ⑤ $1/5$

---

8. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^{\alpha n}}$, con $\alpha > 0$, converge se e solo se

① $\alpha > 0$ ② $\alpha \leq 1$ ③ $\alpha < 1$ ④ $\alpha \geq 1$ ⑤ $\alpha > 1$

---

9. L'equazione cartesiana del piano passante per il punto $A \equiv (1,2,-1)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{a} = (1,1,1)$ e $\mathbf{b} = (-1,0,2)$ è

① $2x - 3y - z + 3 = 0$ ② $2x - 3y + z + 5 = 0$ ③ $2x + 3y + z - 7 = 0$ ④ $2x + 3y - z - 9 = 0$

---

10. Sia γ la curva di equazioni $f(t) = (1+t^3, 1+t, 1-t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ e sia $A \equiv f(1)$. Allora

① γ non è regolare in A
② γ non è biregolare in A
③ γ non è piana
④ γ è contenuta nel piano $\pi : x + y - z = 1$
⑤ γ è contenuta nel piano $\pi : x + z = 2$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (7 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}\,.$$

   (a) Determinare gli zeri e il segno della funzione f.
   (b) Studiare i limiti al bordo del dominio e determinare la presenza di eventuali asintoti.
   (c) Calcolare f', determinandone l'insieme di definizione. Studiare poi i punti di non derivabilità di f.
   (d) Studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti estremanti.
   (e) Tracciare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni ricavate.

2. (5 punti) Si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y + z + 2 = 0\,. \end{cases}$$

   (a) Determinare l'intersezione di r ed s.
   (b) Scrivere le equazioni parametriche di s.
   (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene r ed s.

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (2 punti) Dimostrare che $\sqrt{2}$ è irrazionale.
2. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Cauchy.
3. (4 punti) Scrivere e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^n$.