Analisi e Geometria 1 *Quarto appello – 9 Settembre 2024*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________ **Punteggio Totale:** ______________________

Istruzioni: *I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, appunti, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo: *2 ore e 15 minuti.*

Questionario (10 punti, soglia sufficienza 5)

(Segnare le risposte corrette (◯ una sola, ☐ più di una). Ogni quesito vale un punto)

1. Sia $I_n = \left[-1 - \dfrac{1}{n+1}, 1 + \dfrac{1}{n+1}\right]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $I = \bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} I_n$. Allora

   ① $I = \varnothing$ ② $I = \{0\}$ ③ $I = \{-1, 1\}$ ④ $I = (-1, 1)$ ⑤ ✓ $I = [-1, 1]$

---

2. In $\mathbb{C}$, le equazioni $z^{10} = (1 + \mathrm{i})^5$ e $z^2 = 1 + \mathrm{i}$

   ① hanno esattamente lo stesso numero di soluzioni
   ② hanno esattamente le stesse soluzioni
   ③ ✓ hanno un numero diverso di soluzioni
   ④ hanno solo soluzioni puramente reali
   ⑤ hanno solo soluzioni puramente immaginarie

---

3. Si consideri l'equazione $z^3 = -\mathrm{i}$, in $\mathbb{C}$. Se z_0 è una soluzione, allora

   ① anche $\overline{z_0}$ è una soluzione ② ✓ anche $-\overline{z_0}$ è una soluzione ③ $\operatorname{Re} z_0 = 0$ ④ $\operatorname{Im} z_0 = 0$ ⑤ $\operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Im} z_0$

---

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x} - \sin x$. Allora

   [1] ✓ f è limitata [2] f è illimitata [3] ✓ f è periodica [4] f non è periodica [5] ✓ $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ [6] $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

---

5. Il limite $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x) - \sin(2x^2)}{x^4}$ vale

   ① 0 ② 1 ③ $\dfrac{1}{6}$ ④ $-\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$ ⑥ ✓ $-\dfrac{2}{3}$

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$, dove $\alpha > 0$. Allora in $x = 0$

   [1] ✓ f è continua se e solo se $\alpha > 0$
   [2] f è continua se e solo se $\alpha > 1$
   [3] f non è mai continua
   [4] f è derivabile se e solo se $\alpha > 0$
   [5] ✓ f è derivabile se e solo se $\alpha > 1$
   [6] f non è mai derivabile

---

7. L'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$ vale

① 0 ② $\pi/4$ ③ $\pi/2$ ④ $1/4$ ⑤ $1/5$

---

8. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^{\alpha n}}$, con $\alpha > 0$, converge se e solo se

① $\alpha > 0$ ② $\alpha \leq 1$ ③ $\alpha < 1$ ④ $\alpha \geq 1$ ⑤ $\alpha > 1$

---

9. L'equazione cartesiana del piano passante per il punto $A \equiv (1,2,-1)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{a} = (1,1,1)$ e $\mathbf{b} = (-1,0,2)$ è

① $2x - 3y - z + 3 = 0$ ② $2x - 3y + z + 5 = 0$ ③ $2x + 3y + z - 7 = 0$ ④ $2x + 3y - z - 9 = 0$

---

10. Sia γ la curva di equazioni $f(t) = (1+t^3, 1+t, 1-t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ e sia $A \equiv f(1)$. Allora

① γ non è regolare in A
② γ non è biregolare in A
③ γ non è piana
④ γ è contenuta nel piano $\pi : x + y - z = 1$
⑤ γ è contenuta nel piano $\pi : x + z = 2$

Esercizi (12 punti, soglia sufficienza 6)

1. (7 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}\,.$$

(a) Determinare gli zeri e il segno della funzione f.
(b) Studiare i limiti al bordo del dominio e determinare la presenza di eventuali asintoti.
(c) Calcolare f', determinandone l'insieme di definizione. Studiare poi i punti di non derivabilità di f.
(d) Studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti estremanti.
(e) Tracciare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni ricavate.

2. (5 punti) Si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y + z + 2 = 0\,. \end{cases}$$

(a) Determinare l'intersezione di r ed s.
(b) Scrivere le equazioni parametriche di s.
(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene r ed s.

Teoria (10 punti, soglia sufficienza 5)

1. (2 punti) Dimostrare che $\sqrt{2}$ è irrazionale.
2. (4 punti) Enunciare e dimostrare il teorema di Cauchy.
3. (4 punti) Scrivere e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^n$.

1. (a) Il dominio di f è $D_f = \mathbb{R}$, f si annulla in $x = 0$ e in $x = -1$, è positiva per $x < -1$ ed è negativa per $-1 < x < 0$ o $x > 0$.

   (b) Per $x \to \pm\infty$ si ha $f(x) \sim x$. Poiché la stima asintotica è lineare, potrebbe esistere un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$. Poiché per $x \to \pm\infty$ si ha

$$f(x) - x = \sqrt[3]{x^3 + x^2} - x = x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} - 1\right) \sim x\left(\frac{1}{3x}\right) = \frac{1}{3},$$

   allora la retta $y = x + \dfrac{1}{3}$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

   (c) Per $x \to 0^\pm$ si ha $f(x) \sim \sqrt[3]{x^2}$. Pertanto f non è derivabile in $x = 0$ (punto di cuspide).
   Per $x \to -1$ si ha $f(x) \sim \sqrt[3]{x+1}$. Pertanto f non è derivabile in $x = -1$ (punto di flesso a tangente verticale).

   (d) In $D'_f = D_f \setminus \{0, 1\}$ la funzione è derivabile in quanto composta di funzioni derivabili. Per $x \in D'_f$ si ha

$$f'(x) = \frac{3x + 2}{3\sqrt[3]{x}(x+1)^{2/3}}$$

   Punti stazionari:

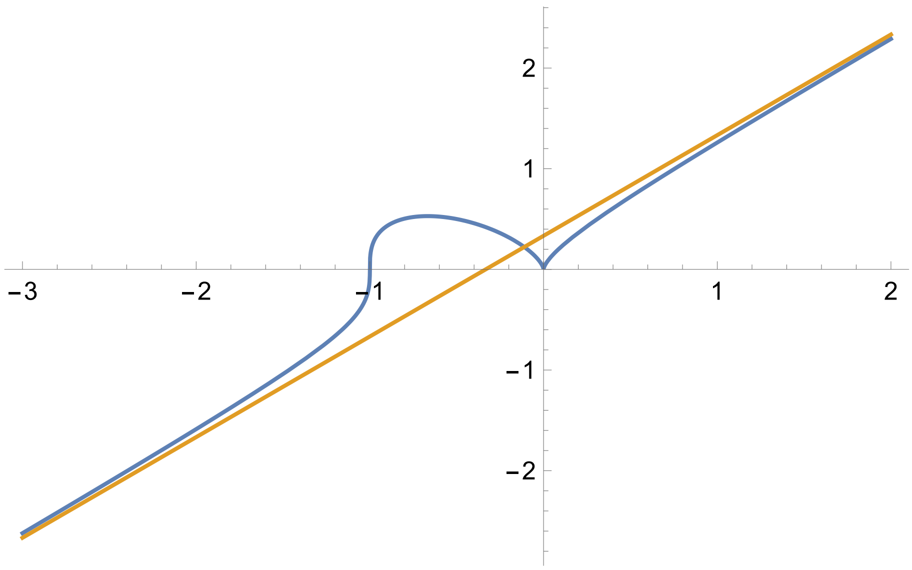
$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{2}{3}.$$

   Applicando il Test di Monotonia f è crescente per $x \in (-\infty, -2/3) \cup (0, +\infty)$, decrescente per $x \in (-2/3, 0)$. Quindi $x = -2/3$ è un punto di massimo locale. Inoltre, per $x = 0$ si ha un punto di minimo locale.
   Infine, poiché

$$\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = \mp\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -1} f'(x) = +\infty,$$

   si ha che $x = 0$ è un punto di cuspide (come già osservato) e che $x = -1$ è un punto di flesso a tangente verticale.

   (e) Grafico.



2. (a) Sostituendo le coordinate del generico punto $(2 - 3t, 1 - t, 1 + t)$ di r nelle equazioni cartesiane che definiscono s, si trova un unico valore del parametro t, ossia $t = 2$. Pertanto, le due rette si intersecano nel punto $P \equiv (-4, -1, 3)$.

   (b) Posto $x = t$ nelle equazioni cartesiane di s, si ha immediatamente

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \\ z = -5 - 2t\,. \end{cases}$$

   (c) Dalle equazioni parametriche, si ha che r ed s hanno, rispettivamente, vettori direttori $\mathbf{a} = (-3, -1, 1)$ e $\mathbf{b} = (1, 1, -2)$. Quindi $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (1, -5, -2)$. Poiché il piano π che contiene le due rette r ed s può essere visto come il piano che passa per il punto P e che ha come direzione ortogonale quella individuata dal vettore $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, si ha $\pi : 1 \cdot (x + 4) - 5 \cdot (y + 1) - 2 \cdot (z - 3) = 0$, ossia $\pi : x - 5y - 2z + 5 = 0$.