Analisi e Geometria 1 (15 Gennaio 2021)

Secondo compito in itinere, 15 Gennaio 2021

Le prime 10 domande possono avere più risposte corrette.
La soluzione della domanda 11 deve essere scritta su un foglio (giustificando ogni risposta). Alla fine, tale foglio deve essere trasformato in un file (in formato immagine, pdf, o word) e deve essere caricato nell'apposita cartella.
Tempo: 90 minuti.

* Questo modulo registrerà il tuo nome, inserire il nome.

1

Domanda
(1 punto)

Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \int_1^{x^2+2x+1} \frac{1}{1+\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

Allora

- [x] $f'(x) = \dfrac{2x+2}{1+\ln(x^2+2x+1)}$.
- [ ] $f'(x) = \dfrac{1}{1+\ln(x^2+2x+1)}$.
- [x] f è strettamente crescente.
- [ ] f ammette un asintoto orizzontale a $+\infty$.

2

Domanda
(1 punto)

Con il cambio di variabile $t = \sqrt{x}$, si ottiene:

- [x] $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$
- [ ] $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$
- [x] $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$
- [ ] $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x = \pi$

3

Domanda
(1 punto)

Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \sin(\pi t) \\ y = t^2 - t \\ z = \cos(\pi t) \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

Allora la curva γ

- [x] è regolare
- [ ] è chiusa
- [ ] è parametrizzata mediante il parametro arco
- [ ] ha lunghezza infinita

4

Domanda
(1 punto)

Sia $f : [-3,\ 2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 5.$$

Allora

- [x] esiste $x_0 \in [-3,\ 2]$ con $f(x_0) = 1$
- [ ] esiste $x_0 \in [-3,\ 2]$ con $f(x_0) = 0$
- [x] esiste un intervallo $[a,\ b] \subseteq [-3,\ 2]$ con $f(x) > \frac{1}{2}$ per ogni $x \in [a,\ b]$
- [ ] $f(x) \geq -3$ per ogni $x \in [-3,\ 2]$

5

Domanda
(1 punto)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $x_0 = 1$ con

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = 1.$$

Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = f(x)^2.$$

Allora

- [ ] $g(x) = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$ per $x \to 1$
- [x] $g(x) = 1 + 2(x-1) + 2(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$ per $x \to 1$
- [ ] g è continua su $\mathbb{R}$
- [ ] g ha un estremo in $x_0 = 1$

6

Domanda
(1 punto)

Sia $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x)=\int_x^1(1+t)\ln t\,\mathrm{d}t.$$

Allora

- [x] f è derivabile
- [ ] $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$
- [x] $\lim_{x\to0^+} f(x)=a\in\mathbb{R}$ con $a<0$
- [x] f è asintotica a $-(x-1)^2$ per $x\to1^-$

7

Domanda
(1 punto)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)\,y(x)}.$$

- [ ] Questa equazione ammette una soluzione costante.
- [x] Si tratta di un'equazione a variabili separabili.
- [ ] La soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(0)=2$ esiste solo per $x\geq0$.
- [ ] Le soluzioni di questa equazione ammettono un asintoto orizzontale a $+\infty$.

8

Domanda
(1 punto)

I due piani di $\mathbb{R}^3$

$$\pi_1 : 6x - y + 4z = 19 \quad \text{e} \quad \pi_2 : 2x - y + 3z = 5$$

- [ ] sono ortogonali
- [ ] non si intersecano
- [x] si intersecano in una retta con direzione $(-1, 10, 4)$
- [ ] si intersecano in una retta con direzione $(1, 5, 2)$

9

Domanda
(1 punto)

Siano $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ due vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$. Si consideri l'equazione

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{b},$$

dove il simbolo $\wedge$ denota il prodotto vettoriale.

- [x] Se $\mathbf{y}$ è una soluzione, allora $\mathbf{y} + \lambda\mathbf{a}$ è una soluzione, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.
- [ ] Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono ortogonali, allora esiste un'unica soluzione.
- [ ] Se $\mathbf{a} = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{b} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$, allora $\mathbf{y} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ è una soluzione.
- [x] Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ non sono ortogonali, non esistono soluzioni.

10

Domanda
(1 punto)

Dati i vettori $\mathbf{a} = (2, -2, 1)$ e $\mathbf{b} = (-4, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Allora

- [ ] l'angolo tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ è $\alpha = \frac{\pi}{4}$
- [x] l'angolo tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ è $\alpha = \frac{3}{4}\pi$
- [x] l'area del triangolo di vertici $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ è $\frac{9}{2}$
- [x] i vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti

11

Domanda. Scrivere la soluzione del seguente esercizio su un foglio, fotografarlo e caricare il file (in formato immagine, o pdf, o word). Tutte le risposte devono essere giustificate.(10 punti)

Si consideri la funzione definita da
$$f(x) = (x-1)\,e^{\frac{x}{1-x^2}}.$$

1. Determinare il dominio di f, gli eventuali zeri e il segno di f.
2. Stabilire se f è continua nel suo dominio e determinare i limiti al bordo del dominio di f.
3. Determinare il dominio di definizione della derivata prima e calcolare f'.
4. Studiare la monotonia di f e determinare gli eventuali punti estremanti, specificando se sono assoluti o relativi.
5. Tracciare un grafico qualitativo della funzione f.
6. Sfruttando lo studio di f svolto nei punti precedenti, si tracci un grafico qualitativo della funzione integrale
$$F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt,$$
dove l'integrale è da intendersi eventualmente in senso improprio.

Carica file

Limite del numero di file: 1 Limite di dimensioni del file singolo: 100MB Tipi di file consentiti: Word,PDF,Immagine