Analisi e Geometria 1 (5 Febbraio 2021)

Primo appello, 5 Febbraio 2021

Alcune domande sono a risposta multipla (quadrati), altre sono a risposta singola (cerchi).
L'ultimo esercizio deve essere svolto interamente, con carta e penna.
Tempo: 90 minuti.

* Questo modulo registrerà il tuo nome, inserire il nome.

1

Domanda a risposte multiple
(2 punti)

L'insieme delle soluzioni dell'equazione $z^2 = -|z| - 1$ in $\mathbb{C}$

- [ ] è vuoto
- [ ] è contenuto nella circonferenza di raggio $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ centrata nell'origine
- [ ] è costituito da un numero finito di elementi
- [ ] è costituito solo da numeri puramente immaginari

2

Domanda a risposte multiple
(2 punti)

Sia $f : (0,1) \to (0,+\infty)$ una funzione che ammette un asintoto verticale per $x \to 0^+$. Allora

- [ ] $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0$
- [ ] $\lim_{x\to 0^+} \log f(x) = -\infty$
- [ ] $\lim_{x\to 0^+} e^{-f(x)} = 0$
- [ ] la funzione $f(x)^2$ ammette un asintoto verticale per $x \to 0^+$

3

Domanda a risposte multiple
(2 punti)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora

- [ ] se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora f è crescente
- [ ] se f è strettamente crescente allora $f'(x) > 0$
- [ ] per il teorema di Lagrange, per ogni retta secante il grafico di f in almeno due punti esiste una retta tangente al grafico di f ad essa parallela
- [ ] per il teorema di Lagrange, per ogni retta tangente al grafico di f esiste una retta secante il grafico di f ad essa parallela

4

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Sia $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ la funzione definita da

$$f(x) = x\,(1 + e^x)$$

e sia $\widehat{f} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ la sua funzione inversa. Allora

- ○ $\widehat{f}'(e + 1) = 1 + 2e$
- ○ $\widehat{f}'(e + 1) = 1 + (e + 2)e^{e+1}$
- ○ $\widehat{f}'(e + 1) = \dfrac{1}{1 + 2e}$
- ○ $\widehat{f}'(e + 1) = \dfrac{1}{1 + (e + 2)e^{e+1}}$

5

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Il polinomio di MacLaurin di ordine 4 della funzione

$$f(x) = \cos(\sin x)$$

è

- ○ $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$
- ○ $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$
- ○ $1 + x^2 - \frac{5}{24}x^4$
- ○ $1 - x^2 - \frac{5}{24}x^4$

6

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}\, dt}{e^{x^2}}$$

- ◯ non esiste
- ◯ vale 0
- ◯ vale $1/2$
- ◯ vale 1
- ◯ vale $+\infty$

7

Domanda a risposte multiple
(2 punti)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \mathrm{e}^{-x+y}.$$

Allora

- ☐ tutte le soluzioni sono illimitate
- ☐ esistono soluzioni che ammettono un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$
- ☐ esistono soluzioni che ammettono un asintoto verticale
- ☐ si tratta di un'equazione lineare

8

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Il volume del parallelepipedo generato dai vettori

$$\mathbf{x} = (2,1,1), \quad \mathbf{y} = (1,1,2), \quad \mathbf{z} = (1,0,1)$$

vale

- -1
- 0
- 1
- $\sqrt{2}$
- 2

9

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Sia π il piano parallelo alle rette

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = -1 + 3s \end{cases}$$

passante per il punto $P \equiv (1,2,3)$.
La distanza tra l'origine e il piano π è

- $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$
- 0
- 1
- $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$
- $2\sqrt{7}$

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Il versore binormale della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = \cos t \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

nel punto $P \equiv (1, 1, 0)$ è

- ○ indefinito poiché la curva non è biregolare
- ○ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)$
- ○ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1)$
- ○ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1)$
- ○ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, -1)$

(1) Scrivere la soluzione del seguente esercizio su fogli A4
(cercando di non eccedere le 3 facciate),
indicando chiaramente nome, cognome, codice persona e data della prova.
(2) Fotografare questi fogli e produrre un unico file pdf
(preferibilmente usando l'applicazione OneDrive),
denominandolo CodicePersona.pdf
(dove al posto di CodicePersona dovete mettere il vostro codice persona).
(3) Caricare il file così ottenuto.

L'esercizio deve essere svolto in modo ordinato.
Tutte le risposte devono essere giustificate.(12 punti)

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x\, e^{3\,\mathrm{artg}(1/x)} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

1. Determinare gli zeri e il segno di f.
2. Determinare gli asintoti di f.
3. Studiare la continuità di f.
4. Determinare il dominio della derivata prima f', e calcolarla. Classificare eventuali punti di non derivabilità.
5. Studiare la monotonia di f e determinare gli eventuali punti estremanti, specificando se sono assoluti o relativi.
6. Tracciare un grafico qualitativo di f.
7. Determinare le primitive della funzione
$$g(x) = f'(x)\, e^{-3\,\mathrm{artg}(1/x)}$$
e calcolare l'integrale
$$I = \int_0^1 g(x)\, dx\,.$$

Carica file

Limite del numero di file: 1   Limite di dimensioni del file singolo: 10MB   Tipi di file consentiti: Word,PDF,Immagine