

# Analisi e Geometria 1 (5 Febbraio 2021)

Primo appello, 5 Febbraio 2021

Alcune domande sono a risposta multipla (quadrati), altre sono a risposta singola (cerchi).  
L'ultimo esercizio deve essere svolto interamente, con carta e penna.  
Tempo: 90 minuti.

\* Questo modulo registrerà il tuo nome, inserire il nome.

1

Domanda a risposte multiple  
(2 punti)

L'insieme delle soluzioni dell'equazione  $z^2 = -|z| - 1$  in  $\mathbb{C}$

- è vuoto
- è contenuto nella circonferenza di raggio  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  centrata nell'origine
- è costituito da un numero finito di elementi
- è costituito solo da numeri puramente immaginari

2

Domanda a risposte multiple  
(2 punti)

Sia  $f : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty)$  una funzione che ammette un asintoto verticale per  $x \rightarrow 0^+$ . Allora

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-f(x)} = 0$

la funzione  $f(x)^2$  ammette un asintoto verticale per  $x \rightarrow 0^+$

3

Domanda a risposte multiple  
(2 punti)

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile. Allora

se  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , allora  $f$  è crescente

se  $f$  è strettamente crescente allora  $f'(x) > 0$

per il teorema di Lagrange, per ogni retta secante il grafico di  $f$  in almeno due punti esiste una retta tangente al grafico di  $f$  ad essa parallela

per il teorema di Lagrange, per ogni retta tangente al grafico di  $f$  esiste una retta secante il grafico di  $f$  ad essa parallela

4

Domanda a risposta singola  
(2 punti)

Sia  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  la funzione definita da

$$f(x) = x(1 + e^x)$$

e sia  $\widehat{f} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  la sua funzione inversa. Allora

- $\widehat{f}'(e+1) = 1 + 2e$
- $\widehat{f}'(e+1) = 1 + (e+2)e^{e+1}$
- $\widehat{f}'(e+1) = \frac{1}{1+2e}$
- $\widehat{f}'(e+1) = \frac{1}{1+(e+2)e^{e+1}}$

5

Domanda a risposta singola  
(2 punti)

Il polinomio di MacLaurin di ordine 4 della funzione

$$f(x) = \cos(\sin x)$$

è

- $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$
- $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$
- $1 + x^2 - \frac{5}{24}x^4$
- $1 - x^2 - \frac{5}{24}x^4$

6

Domanda a risposta singola  
(2 punti)

Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}$$

- non esiste
- vale 0
- vale 1/2
- vale 1
- vale  $+\infty$

7

Domanda a risposte multiple  
(2 punti)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = e^{-x+y}.$$

Allora

- tutte le soluzioni sono illimitate
- esistono soluzioni che ammettono un asintoto orizzontale per  $x \rightarrow +\infty$
- esistono soluzioni che ammettono un asintoto verticale
- si tratta di un'equazione lineare

8

Domanda a risposta singola  
(2 punti)

Il volume del parallelepipedo generato dai vettori

$$\mathbf{x} = (2, 1, 1), \quad \mathbf{y} = (1, 1, 2), \quad \mathbf{z} = (1, 0, 1)$$

vale

- 1
- 0
- 1
- $\sqrt{2}$
- 2

9

Domanda a risposta singola  
(2 punti)

Sia  $\pi$  il piano parallelo alle rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = -1 + 3s \end{cases}$$

passante per il punto  $P \equiv (1, 2, 3)$ .

La distanza tra l'origine e il piano  $\pi$  è

- $-\frac{2}{\sqrt{5}}$
- 0
- 1
- $\frac{2}{\sqrt{5}}$
- $2\sqrt{7}$

Domanda a risposta singola  
(2 punti)

Il versore binormale della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = e^t \\ y = \cos t \\ z = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

nel punto  $P \equiv (1, 1, 0)$  è

- indefinito poiché la curva non è biregolare
- $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)$
- $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1)$
- $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, -1)$
- $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, -1)$

- (1) Scrivere la soluzione del seguente esercizio su fogli A4 (cercando di non eccedere le 3 facciate), indicando chiaramente nome, cognome, codice persona e data della prova.
- (2) Fotografare questi fogli e produrre un unico file pdf (preferibilmente usando l'applicazione OneDrive), denominandolo CodicePersona.pdf (dove al posto di CodicePersona dovete mettere il vostro codice persona).
- (3) Caricare il file così ottenuto.

L'esercizio deve essere svolto in modo ordinato.  
Tutte le risposte devono essere giustificate.(12 punti)

Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} x e^{3\operatorname{artg}(1/x)} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

1. Determinare gli zeri e il segno di  $f$ .
2. Determinare gli asintoti di  $f$ .
3. Studiare la continuità di  $f$ .
4. Determinare il dominio della derivata prima  $f'$ , e calcolarla. Classificare eventuali punti di non derivabilità.
5. Studiare la monotonia di  $f$  e determinare gli eventuali punti estremanti, specificando se sono assoluti o relativi.
6. Tracciare un grafico qualitativo di  $f$ .
7. Determinare le primitive della funzione

$$g(x) = f'(x) e^{-3\operatorname{artg}(1/x)}$$

e calcolare l'integrale

$$I = \int_0^1 g(x) dx.$$

 Carica file

Limite del numero di file: 1 Limite di dimensioni del file singolo: 10MB Tipi di file consentiti: Word,PDF,Immagine