Analisi e Geometria 1 (12 Luglio 2021)

Terzo appello

Alcune domande sono a risposta multipla (quadrati) e alcune domande sono a risposta singola (cerchi).
Tempo: 90 minuti.

* Questo modulo registrerà il tuo nome, inserire il nome.

1

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Siano

$$a_n = \log\left(\frac{n+15}{n+6}\right) \text{ e } A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Allora:

- ○ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente.
- ○ A ammette un estremo inferiore, ma non un minimo.
- ○ A ammette un estremo superiore, ma non un massimo.
- ○ $\lim_{n\to+\infty} a_n > 0$.
- ○ nessuna delle altre risposte.

2

Domanda a risposta multipla
(2 punti)

Sia
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2, -\frac{\pi}{3} \le \arg(z) \le \frac{\pi}{3} \right\}.$$
Allora:

- [ ] A contiene $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^5$.
- [ ] se A contiene z, allora contiene anche $\bar{z}$.
- [ ] A contiene $(1-i)^2$.
- [ ] se A contiene z, allora contiene anche $|z|$.

3

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x > 0; \\ x^2 + \alpha x + 1 & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$
Allora vale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

- ◯ f non è derivabile per nessun valore di α.
- ◯ f è derivabible per ogni α.
- ◯ f è derivabile per $\alpha = \frac{1}{2}$.
- ◯ f è derivabile per $\alpha = 1$.
- ◯ nessuna delle altre risposte.

4

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Sia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(x) = x + o(x)$ per $x \to 0$.
Allora:

- ◯ f è derivabile in $x = 0$.
- ◯ $f(x) = o(1 - \cos(x))$ per $x \to 0$.
- ◯ $f(x) = o(\sin(x^2))$ per $x \to 0$.
- ◯ $x = 0$ può essere un massimo o minimo di f.
- ◯ nessuna delle altre risposte.

5

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ derivabile con

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x < 0; \\ f'(x) < 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Allora:

- ◯ se f è prolungabile per continuità per $x = 0$,
  allora $x = 0$ diventa un punto estremante.
- ◯ se f non è prolungabile per continuità per $x = 0$,
  allora f ammette un asintoto verticale.
- ◯ f ammette un massimo o minimo.
- ◯ f ammette almeno un asintoto (orizzontale, obliquo o verticale).
- ◯ nessuna delle altre risposte.

6

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^{2-\alpha}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in [0, 1]$. Allora:

- ◯ l'integrale converge se e solo se $\alpha \in [0, 1)$.
- ◯ l'integrale converge se e solo se $\alpha \in (0, 1)$.
- ◯ l'integrale non converge per nessun valore di $\alpha \in [0, 1]$.
- ◯ l'integrale converge solo per $\alpha = 1$.
- ◯ nessuna delle altre risposte.

7

Domanda a risposta multipla
(2 punti)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = x(1 + y^2)$$

Allora vale che

- ☐ si tratta di un'equazione lineare.
- ☐ si tratta di un'equazione a variabili separabili.
- ☐ ogni soluzione ha un asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.
- ☐ ogni soluzione ha un asintoto verticale.
- ☐ esiste una soluzione costante.

8

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Si considerino i tre punti:

$$A = (3, 0, 3), \quad B = (2, -1, 3), \quad C = (1, -3, 4)$$

e l'angolo α tra $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$. Allora:

- ◯ $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
- ◯ $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.
- ◯ $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.
- ◯ $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.
- ◯ nessuna delle altre risposte.

9

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Si consideri il punto $P = (2, -3, -4)$ e il piano

$$\pi : 4x + 3y + z = 6.$$

Allora:

- ◯ P è contenuto nel piano π.
- ◯ la distanza $d(\pi, P) = \frac{1}{\sqrt{26}}$.
- ◯ la distanza $d(\pi, P) = \frac{11}{\sqrt{26}}$.
- ◯ la distanza $d(\pi, P) = \frac{24}{\sqrt{26}}$.
- ◯ nessuna delle altre risposte.

Domanda a risposta singola
(2 punti)

Si consideri la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos(e^t) \\ y = -\sqrt{2}e^t \\ z = \sin(e^t) \end{cases} \text{ con } t \in [0, 1].$$

Allora:

- esiste $t_0 \in [0, 1]$ tale che γ non è regolare in t_0.
- la lunghezza di γ è $\sqrt{3}e$.
- la lunghezza di γ è $\sqrt{2}(e - 1)$.
- la lunghezza di γ è $\sqrt{3}(e - 1)$.
- nessuna delle altre risposte.

- Svolgere l'esercizio in maniera ordinata, giustificando tutti i passaggi, su fogli A4 (cercando di non eccedere le 4 facciate), indicando chiaramente nome, cognome, codice persona e data della prova.
- Alla fine, generare un unico file pdf (usando preferibilmente l'app OneDrive), denominare il file codice_persona.pdf (ad esempio, 12345678.pdf, se il codice persona fosse 12345678) e caricarlo (utilizzando l'applicazione qui sotto).

Si consideri la funzione

$$f(x) = \operatorname{artg} \frac{2+x^2}{2-x^2}.$$

1. Stabilire il dominio di f e individuare eventuali simmetrie ed eventuali asintoti.
2. Studiare la continuità di f e dire se esistono punti in cui f è prolungabile con continuità
3. Determinare il dominio della derivata prima di f e calcolarla.
4. Studiare la monotonia di f e determinare gli eventuali punti estremanti, specificando se sono assoluti o relativi.
5. Determinare il dominio della derivata seconda e calcolarla.
6. Studiare la convessità di f e determinare eventuali punti di flesso.
7. Tracciare un grafico qualitativo di f.
8. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 di f.

Carica file

Limite del numero di file: 1 Limite di dimensioni del file singolo: 10MB Tipi di file consentiti: PDF;Immagine