1. Sia $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la trasformazione definita, per ogni $z \in \mathbb{C}$, da
$$F(z) = (1 - \mathrm{i})^2 \left(\frac{z}{2} + \mathrm{i}\right) - 3 + \mathrm{i}\,.$$
   (a) Riconoscere la trasformazione $F$.
   (b) Determinare gli eventuali punti fissi di $F$.
   (c) Determinare, se esiste, la trasformazione inversa di $F$.
   (d) Mostrare che $F^4(z) = z$, per ogni $z \in \mathbb{C}$.
   (e) Determinare, sul piano di Gauss, l'immagine $F(A)$ dell'insieme
$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\,,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\,,\ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \le 1\}\,.$$

2. Calcolare il limite
$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{artg} \frac{\sqrt{n^4+n^2+\sqrt{n}}}{n^2}\ \ln(1 + \sin \frac{2}{n})}{n^2 \sqrt{n^2 + n\sqrt{n}}\ \ln(\cos \frac{1}{n^2})}\,.$$

3. Stabilire se le funzioni $f$ e $g$, definite da
$$f(x) = (2x\sqrt{x} - 3x^3)\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + x} - 2x^2 \ln(x^2 + \pi)$$
$$g(x) = x \ln(x^4 + \sqrt{2}) + 3(x + 2)\sqrt{x^4 + 1}\ \mathrm{e}^x$$
   per $x \ge 0$, sono asintoticamente equivalenti per $x \to +\infty$.

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, da
$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}\,.$$
   (a) Verificare che la funzione $f$ è effettivamente definita su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Determinare gli eventuali asintoti di $f$.
   (c) Calcolare la derivata prima di $f$.
   (d) Determinare i punti di massimo e di minimo di $f$.
   (e) Disegnare il grafico qualitativo di $f$.
   (f) Senza calcolare la derivata seconda di $f$, determinare il numero minimo di punti di flesso di $f$.
   (g) Determinare l'immagine $I$ di $f$.
   (h) Determinare i punti in cui $f$ è localmente invertibile.
   (i) Scrivere lo sviluppo di Taylor del secondo ordine nel punto $x_0 = 1$, con resto secondo Peano, della funzione $g$ definita da
$$g(x) = \frac{x}{f(x)}\,.$$

5. Per $x \to 0$, determinare la parte principale della funzione
$$f(x) = \ln(1 + 2x) - 2 \sin x + \operatorname{tg} 2x^2$$

## Soluzioni

1. (a) Semplificando l'espressione di $F$, si ha

$$F(z) = -2\mathrm{i}\left(\frac{z}{2} + \mathrm{i}\right) - 3 + \mathrm{i} = -\mathrm{i}\, z + 2 - 3 + \mathrm{i} = -\mathrm{i}\, z - 1 + \mathrm{i}\,.$$

Pertanto, la trasformazione $F$ è una rototraslazione. Più precisamente, è la rotazione attorno all'origine, in senso orario, di un angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$ seguita da una traslazione di $-1$ lungo l'asse reale e di $1$ lungo l'asse immaginario.

(b) I punti fissi di $F$ sono i punti per cui $F(z) = z$. In questo caso, si ha un solo punto fisso poiché

$$F(z) = z \iff -\mathrm{i}\, z - 1 + \mathrm{i} = z \iff -(1+\mathrm{i})\, z = 1 - \mathrm{i} \iff z = -\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = -\frac{(1-\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}\,.$$

(c) Posto $w = F(z)$, si ha $w = -\mathrm{i}\, z - 1 + \mathrm{i}$, ossia

$$z = \frac{w + 1 - \mathrm{i}}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}\,(w + 1 - \mathrm{i}) = \mathrm{i}\, w + 1 + \mathrm{i}\,.$$

Quindi, la trasformazione $F$ è invertibile e la trasformazione inversa $F^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è definita da

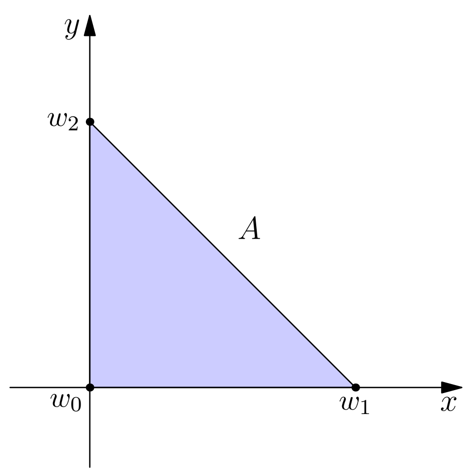
$$F^{-1}(z) = \mathrm{i}\, z + 1 + \mathrm{i}\,.$$

(d) Per ogni $z \in \mathbb{C}$, si ha

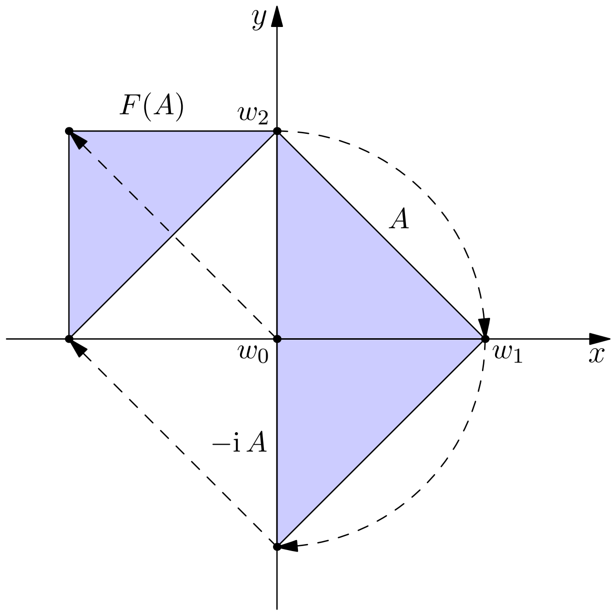
$$F^2(z) = F(F(z)) = -\mathrm{i}\, F(z) - 1 + \mathrm{i} = -\mathrm{i}\,(-\mathrm{i}\, z - 1 + \mathrm{i}) - 1 + \mathrm{i} = -z + 2\mathrm{i}$$
$$F^3(z) = F^2(F(z)) = -F(z) + 2\mathrm{i} = -(-\mathrm{i}\, z - 1 + \mathrm{i}) + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}\, z + 1 + \mathrm{i}\,.$$

Pertanto, si ha $F^3(z) = F^{-1}(z)$, ossia $F^4(z) = z$, per ogni $z \in \mathbb{C}$.

(e) Posto $z = x + \mathrm{i}\, y$, con $x, y \in \mathbb{R}$, l'insieme $A$ è determinato dalle condizioni $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $x + y \le 1$. Pertanto, l'insieme $A$ è il triangolo di vertici $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ e $w_2 = \mathrm{i}$, come si vede nella seguente figura:




Poiché $F$ è una rototraslazione, l'immagine $F(A)$ è ancora un triangolo. Più precisamente, $F(A)$ è il triangolo che si ottiene ruotando $A$ attorno all'origine, in senso orario, di un angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e poi traslando l'insieme ottenuto di $-1$ lungo l'asse reale e di $1$ lungo l'asse immaginario, come si vede in figura:




2. Per la gerarchia degli infiniti, si ha

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{artg}\frac{n^2}{n^2}\ \ln(1+\sin\frac{2}{n})}{n^3\ \ln(\cos\frac{1}{n^2})} = \operatorname{artg} 1 \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\sin\frac{2}{n})}{n^3\ \ln(1+(\cos\frac{1}{n^2}-1))}\,.$$

Poiché $\sin\frac{2}{n} \sim \frac{2}{n}$ e $\cos\frac{1}{n^2} - 1 \sim -\frac{1}{2n^4}$ per $n \to +\infty$, si ha

$$L = \frac{\pi}{4} \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n^3\ \ln(1-\frac{1}{2n^4})}\,.$$

Poiché $\ln(1+\frac{2}{n}) \sim \frac{2}{n}$ e $\ln(1-\frac{1}{2n^2}) \sim -\frac{1}{2n^4}$ per $n \to +\infty$, si ha

$$L = \frac{\pi}{4} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{n}}{n^3\,(-\frac{1}{2n^4})} = \frac{\pi}{4} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\ \frac{2}{n}\ (-2n^4) = -\pi\,.$$

3. Si tratta di calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x\sqrt{x} - 3x^3)\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+x} - 2x^2\ln(x^2+\pi)}{x\ln(x^4+\sqrt{2}) + 3(x+2)\sqrt{x^4+1}\ \mathrm{e}^x}\,.$$

Per la gerarchia degli infiniti, si ha

$$f(x) \sim -3x^3\,\mathrm{e}^x \qquad \text{e} \qquad g(x) \sim 3x\cdot x^2\,\mathrm{e}^x = 3x^3\,\mathrm{e}^x \qquad \text{per } x\to+\infty\,.$$

Quindi, si ha

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^3\,\mathrm{e}^x}{3x^3\,\mathrm{e}^x} = -1\,.$$

Pertanto, le due funzioni $f$ e $g$ non sono asintoticamente equivalenti per $x \to +\infty$.

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, da

$$f(x) = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - x}\,.$$

(a) Poiché $\mathrm{e}^x > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $f$ è effettivamente definita su tutto $\mathbb{R}$.

(b) Poiché si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - x} = -1\,,$$

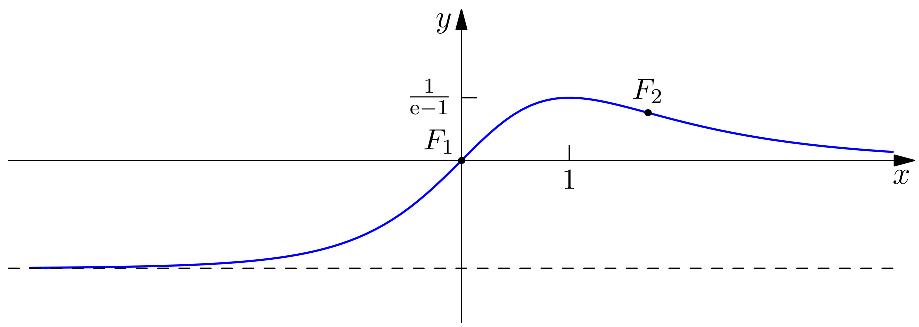
la funzione $f$ ammette la retta di equazione $y = 0$ come asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ ed ammette la retta di equazione $y = -1$ come asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

(c) La derivata prima di $f$ è

$$f'(x) = \frac{(1-x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - x)^2}\,.$$

(d) Si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq 1$. Pertanto, la funzione $f$ ha un punto di massimo in $x = 1$. Più precisamente, ha un punto di massimo in $M \equiv (1, \frac{1}{\mathrm{e}-1})$.

(e) Il grafico di $f$ è




(f) La funzione $f$ possiede almeno due punti di flesso.

(g) L'immagine di $f$ è l'intervallo $I = (-1, \frac{1}{\mathrm{e}-1}]$.

(h) La funzione $f$ è localmente invertibile per ogni $x \neq 1$.

(i) Lo sviluppo di Taylor del secondo ordine nel punto $x_0 = 1$, con resto secondo Peano, della funzione $g$ è

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{f(x)} = \mathrm{e}^x - x \\ &= \mathrm{e} + \mathrm{e}\,(x-1) + \frac{\mathrm{e}}{2}\,(x-1)^2 + o((x-1)^2) - 1 - (x-1) \\ &= \mathrm{e} - 1 + (\mathrm{e}-1)\,(x-1) + \frac{\mathrm{e}}{2}\,(x-1)^2 + o((x-1)^2) \qquad \text{per } x \to 1\,. \end{aligned}$$

5. Per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(2x - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)\right) - 2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + (2x^2 + o(x^3)) \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} - 2x + \frac{x^3}{3} + 2x^2 + o(x^3) \\ &= 3x^3 + o(x^3)\,. \end{aligned}$$

Pertanto, la parte principale di $f(x)$, per $x \to 0$, è $3x^3$.