1. Calcolare lo sviluppo di MacLaurin del quarto ordine della funzione
$$f(x) = \frac{e^x \ \ln(1+x)}{1-x} .$$

2. Calcolare il limite
$$L = \lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x (1-t^3)\, e^{-t-t^2}\ dt}{\displaystyle\int_1^x (1-t^4)\, e^{-t-t^2}\ dt} .$$

3. Calcolare l'integrale improprio
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^x \operatorname{artg} e^x}{1+e^{2x}}\ dx .$$

4. Stabilire se l'integrale improprio
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\ dx$$
è convergente.

5. Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'(x) - e^x y(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\ e^{e^x} .$$

6. Stabilire se i seguenti fasci di piani
$$\begin{aligned} \Phi_1 &: \ \lambda(x+2y+z-1) + \mu(x-y+2z+2) = 0 \\ \Phi_2 &: \ \lambda(x+8y-z-7) + \mu(x-7y+4z+8) = 0 \end{aligned}$$
sono uguali.

7. Calcolare l'integrale di linea
$$I = \int_\gamma \sqrt{x^2+y^2+4z}\ ds$$
dove γ è la curva rappresentata dalla funzione vettoriale $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \theta^2)$.

8. Sia
$$\gamma : \begin{cases} x = \cos 2\theta + 4\cos\theta \\ y = \sin 2\theta - 4\sin\theta \\ z = \sin 3\theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R} .$$
   (a) Mostrare che γ è una curva regolare nel punto $P_0 \in \gamma$ che si ottiene per $\theta = 0$.
   (b) Determinare il punto di intersezione della retta r tangente a γ in P_0 con il piano $\pi : x + 2y + z - 1 = 0$.
   (c) Determinare i versori della terna intrinseca di γ nel punto P_0 .
   (d) Determinare il piano osculatore, il piano normale e il piano rettificante di γ in P_0 .
   (e) Determinare la curvatura, il raggio di curvatura e il centro di curvatura di γ in P_0 .

Soluzioni

1. Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^3) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x \ln(1+x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \\
&= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^x \ln(1+x)}{1-x} &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) \\
&= x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) + o(x^4) \\
&= x + \frac{3}{2}\, x^2 + \frac{11}{6}\, x^3 + \frac{11}{6}\, x^4 + o(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Quindi, per $x \to 0$, si ha

$$f(x) = x + \frac{3}{2}\, x^2 + \frac{11}{6}\, x^3 + \frac{11}{6}\, x^4 + o(x^4)\,.$$

2. Il limite presenta una forma di indeterminazione $0/0$. Applicando la regola di De L'Hôpital e utilizzando il secondo teorema fondamentale, si ha

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x^3)\,\mathrm{e}^{-x-x^2}}{(1-x^4)\,\mathrm{e}^{-x-x^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1+x+x^2}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{3}{4}\,.$$

3. Si ha un integrale immediato:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\alpha\to+\infty} \int_0^\alpha \frac{\mathrm{e}^x \operatorname{artg} \mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\, \mathrm{d}x = x \lim_{\alpha\to+\infty} \left[\frac{(\operatorname{artg} \mathrm{e}^x)^2}{2}\right]_0^\alpha \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\alpha\to+\infty} ((\operatorname{artg} \mathrm{e}^\alpha)^2 - (\operatorname{artg} 1)^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{3}{32}\, \pi^2\,.
\end{aligned}$$

4. La funzione integranda

$$f(x) = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

è continua su tutto l'intervallo $(1, +\infty)$. Inoltre, essa è positiva su questo intervallo, essendo

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\, \frac{x + \sqrt{x+1} - x - 1}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\, \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\, \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}}\, \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\, \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}}\, \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\,.
\end{aligned}$$

Per $x \to +\infty$, si ha
$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$
Poiché $1/\sqrt{x}$ non è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$, applicando il criterio del confronto asintotico possiamo concludere che nemmeno la funzione f è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$, ossia che l'integrale I non è convergente.

5. L'integrale generale è
$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}\left[\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{e}^{-\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right] \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\left[\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + c\right] \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\left[\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x + c\right] \end{aligned}$$
dove c è un parametro reale arbitrario. Si tratta ora di calcolare l'integrale
$$I = \int \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$
Posto $t = \sqrt{2x+1}$, si ha $x = \frac{t^2-1}{2}$, $\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$ e
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t}{t^2-1}\,t\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 2\int \left(1 + \frac{1}{(t-1)(t+1)}\right)\mathrm{d}t \\ &= 2t + \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 2t + \ln|t-1| - \ln|t+1| = 2t - \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| \\ &= 2\sqrt{2x+1} - \ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}\right| = 2\sqrt{2x+1} - \ln\left|\frac{(\sqrt{2x+1}+1)^2}{2x}\right| \\ &= 2\sqrt{2x+1} + \ln 2|x| - 2\ln(1+\sqrt{2x+1})\,. \end{aligned}$$
Quindi, si ha
$$y(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\left(2\sqrt{2x+1} + \ln 2|x| - 2\ln(1+\sqrt{2x+1}) + c\right)\,.$$

6. Due fasci di piani sono uguali quando ammettono la stessa retta come sostegno. Equivalentemente, due fasci di piani sono uguali quando i piani che generano uno di essi fanno parte dell'altro fascio. Pertanto, consideriamo il fascio $\Phi_1 : \lambda(x+2y+z-1)+\mu(x-y+2z+2) = 0$ e i piani $\pi_1 : x+8y-z-7 = 0$ e $\pi_2 : x-7y+4z+8 = 0$ che generano Φ_2, e mostriamo che $\pi_1, \pi_2 \in \Phi_1$. Scegliamo, ad esempio, il punto $P_1 \equiv (0,1,1)$ che appartiene al piano π_1, ma non al sostegno di Φ_1. Sia π_1' il piano appartenente al fascio Φ_1 passante per P_1. Imponendo il passaggio per P_1, si ha $2\lambda + 3\mu = 0$, da cui si ricava, ad esempio, $\lambda = 3$ e $\mu = -2$. Pertanto, si ha
$$\pi_1' : 3(x+2y+z-1) - 2(x-y+2z+2) = 0$$
ossia
$$\pi_1' : x+8y-z-7 = 0\,.$$
Poiché hanno uguale equazione, i due piani π_1 e π_1' sono uguali, ossia $\pi_1 \in \Phi_1$. Scegliamo ora, ad esempio, il punto $P_2 \equiv (0,0,-2)$ che appartiene al piano π_2, ma non al sostegno di Φ_1. Sia π_2' il piano appartenente al fascio Φ_1 passante per P_2. Imponendo il passaggio per P_2, si ha $-3\lambda - 2\mu = 0$, da cui si ricava, ad esempio, $\lambda = -2$ e $\mu = 3$. Pertanto, si ha
$$\pi_2' : -2(x+2y+z-1) + 3(x-y+2z+2) = 0$$
ossia
$$\pi_2' : x-7y+4z+8 = 0\,.$$
Poiché hanno uguale equazione, i due piani π_2 e π_2' sono uguali, ossia $\pi_2 \in \Phi_1$. Pertanto, possiamo concludere che $\Phi_2 \subseteq \Phi_1$ e quindi che $\Phi_1 = \Phi_2$.

7. Poiché $f'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 2\theta)$, si ha $\|f'(\theta)\| = \sqrt{1+4\theta^2} \neq 0$ per ogni $\theta \in [0,\pi]$. Pertanto, la curva γ è regolare, è di classe $\mathcal{C}^1$ e

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma \sqrt{x^2+y^2+4z}\, \mathrm{d}s = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 4\theta^2}\, \|f'(\theta)\|\, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi (1+4\theta^2)\, \mathrm{d}\theta = \left[\theta + \frac{4}{3}\,\theta^3\right]_0^\pi = \pi + \frac{4}{3}\,\pi^3 . \end{aligned}$$

8. Sia $f(\theta) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = (\cos 2\theta + 4\cos\theta, \sin 2\theta - 4\sin\theta, \sin 3\theta)$.

   (a) Si ha $P_0 = f(0) = (5,0,0)$. Inoltre, si ha

   $$f'(\theta) = (-2\sin 2\theta - 4\sin\theta, 2\cos 2\theta - 4\cos\theta, 3\cos 3\theta)$$

   e quindi $f'(0) = (0,-2,3)$. Poiché $f'(0) \neq \mathbf{0}$, la curva γ è regolare in P_0.

   (b) La retta tangente a γ in P_0 è la retta

   $$r : \begin{cases} x = x(0) + x'(0)\,t = 5 \\ y = y(0) + y'(0)\,t = -2t \\ x = z(0) + z'(0)\,t = 3t . \end{cases}$$

   Intersecando questa retta con il piano π, si ha $5 - 4t + 3t - 1 = 0$, ossia $t = 4$. Pertanto $r \cap \pi \equiv (5, -8, 12)$.

   (c) Il versore tangente a γ in P_0 è

   $$\mathbf{t}(0) = \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(0,-2,3)}{\sqrt{13}} .$$

   Poiché

   $$f''(\theta) = (-4\cos 2\theta - 4\cos\theta, -4\sin 2\theta + 4\sin\theta, -9\sin 3\theta),$$

   si ha $f''(0) = (-8,0,0)$ e quindi

   $$f'(0) \wedge f''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ -8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-24,-16) = 8(0,-3,-2) .$$

   Pertanto, si ha $\|f'(0) \wedge f''(0)\| = 8\sqrt{13}$ e

   $$\mathbf{b}(0) = \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(0,-3,-2)}{\sqrt{13}} .$$

   Infine, si ha

   $$\mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{1}{13} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1,0,0) .$$

   (d) Posto $\mathbf{x} = (x,y,z)$, il piano osculatore, il piano normale e il piano rettificante di γ in P_0 sono rispettivamente dati da

   $$\begin{aligned} \pi_o &: \langle \mathbf{b}(0), \mathbf{x} - f(0)\rangle = 0 \\ \pi_n &: \langle \mathbf{t}(0), \mathbf{x} - f(0)\rangle = 0 \\ \pi_r &: \langle \mathbf{n}(0), \mathbf{x} - f(0)\rangle = 0 \end{aligned} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{aligned} \pi_o &: 3y + 2z = 0 \\ \pi_n &: 2y - 3z = 0 \\ \pi_r &: x = 5 . \end{aligned}$$

   (e) La curvatura, il raggio di curvatura e il centro di curvatura di γ in P_0 sono rispettivamente dati da

   $$\begin{aligned} \kappa(0) &= \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{8\sqrt{13}}{13\sqrt{13}} = \frac{8}{13} \\ \rho(0) &= \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{13}{8} \\ C(0) &= f(0) + \rho(0)\,\mathbf{n}(0) = (5,0,0) + \frac{13}{8}(-1,0,0) = \left(\frac{27}{8}, 0, 0\right) . \end{aligned}$$