Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Prima prova in itinere.** **16 novembre 2009** **Compito A**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.
Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia $f(x) = \dfrac{\arctan(\sqrt[3]{x}) - e^{\sqrt[3]{x}} + 1}{\ln(1 + \tan\sqrt[3]{x})}$

   (a) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0} f(x)$. Risposta: $\boxed{0}$

   (b) Esistono un numero $K \neq 0$ e un numero $\alpha > 0$ per i quali si abbia $f(x) \sim Kx^{\alpha}$, per $x \to 0$? In caso affermativo, determinare una tale funzione Kx^{α}. Risposta: $\boxed{-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}}$

   (c) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in un intorno del punto $x_0 = 0$.

   Giustificare le risposte, riportando i calcoli:

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{e^x}$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Insieme di definizione di f: $(0, +\infty)$
Limiti agli estremi: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$
Eventuali asintoti: $x = 0$ (asintoto verticale); $y = 0$ (asintoto orizzontale).
Derivata prima: $f'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1 - \ln x\right)$
Qual è il più grande intervallo sul quale f è crescente? $(0, 1]$ Qual è il più grande intervallo sul quale f è decrescente? $[1, +\infty)$
Eventuali punti di massimo locale: Eventuali punti di minimo locale: L'unico punto di massimo locale è $x_0 = 1$, non ci sono punti di minimo locali.
Derivata seconda: $f''(x) = e^{-x}\left(1 + \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$
Studio della convessità e della concavità : f è concava su $(0, x_0)$, f è convessa su $(x_0, +\infty)$, ove $x_0 > 1$ (si deduce da un confronto grafico)
Disegnare un grafico qualitativo della funzione $f(x)$:
Disegnare un grafico qualitativo della funzione $\lvert f(x)\rvert$:
Esistono punti in cui la funzione $\lvert f(x)\rvert$ *non* è derivabile? Motivare la risposta. La funzione $\lvert f(x)\rvert$ non è derivabile in $x_0 = \frac{1}{e}$.

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|^a \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali eventuali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x_0 = 0$.

Risposta: $\boxed{f \text{ è continua in } x_0 = 0 \text{ se } a > 0}$

(b) Usando la definizione di derivata, determinare gli eventuali $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f è derivabile in $x_0 = 0$.

Risposta: $\boxed{f \text{ è derivabile in } x_0 = 0 \text{ se } a > 1}$

Giustificare le risposte, riportando i calcoli:

4. Si consideri l'equazione

$$(z-1)^4 = (1-i)^4$$

nel campo complesso $\mathbb{C}$.

(a) Scrivere tutte le soluzioni, nella forma algebrica $a + ib$:

$$\boxed{2+i, \qquad i, \qquad -i, \qquad 2-i}$$

(b) Disegnare tutte le soluzioni sul piano complesso:

Motivare le risposte, riportando i calcoli:

Domande di teoria

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Prima prova in itinere.** **16 novembre 2009** **Compito B**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.
Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia $f(x) = \dfrac{-\tan(\sqrt[3]{x}) + e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\ln(1 + \arctan\sqrt[3]{x})}$

   (a) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0} f(x)$. Risposta: $\boxed{0}$

   (b) Esistono un numero $K \neq 0$ e un numero $\alpha > 0$ per i quali si abbia $f(x) \sim Kx^{\alpha}$, per $x \to 0$? In caso affermativo, determinare una tale funzione Kx^{α}. Risposta: $\boxed{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}}$

   (c) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in un intorno del punto $x_0 = 0$.

   Giustificare le risposte, riportando i calcoli:

2. Studiare la funzione

$$f(x) = -\frac{1+\ln x}{e^x}$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Insieme di definizione di f: $(0, +\infty)$
Limiti agli estremi: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$
Eventuali asintoti: $x = 0$ (asintoto verticale); $y = 0$ (asintoto orizzontale).
Derivata prima: $f'(x) = e^{-x}\left(-\frac{1}{x} + 1 + \ln x\right)$
Qual è il più grande intervallo sul quale f è crescente? $[1, +\infty)$ Qual è il più grande intervallo sul quale f è decrescente? $(0, 1]$
Eventuali punti di massimo locale: Eventuali punti di minimo locale: L'unico punto di minimo locale è $x_0 = 1$, non ci sono punti di massimo locali.
Derivata seconda: $f''(x) = e^{-x}\left(-1 - \ln x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$
Studio della convessità e della concavità : f è convessa su $(0, x_0)$, f è concava su $(x_0, +\infty)$, ove $x_0 > 1$ (si deduce da un confronto grafico)
Disegnare un grafico qualitativo della funzione $f(x)$:
Disegnare un grafico qualitativo della funzione $\lvert f(x)\rvert$:
Esistono punti in cui la funzione $\lvert f(x)\rvert$ *non* è derivabile? Motivare la risposta. La funzione $\lvert f(x)\rvert$ non è derivabile in $x_0 = \frac{1}{e}$.

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|^a \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali eventuali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x_0 = 0$.

Risposta: f è continua in $x_0 = 0$ se $a > 0$

(b) Usando la definizione di derivata, determinare gli eventuali $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f è derivabile in $x_0 = 0$.

Risposta: f è derivabile in $x_0 = 0$ se $a > 1$

Giustificare le risposte, riportando i calcoli:

4. Si consideri l'equazione

$$(z+1)^4 = (1+i)^4$$

nel campo complesso $\mathbb{C}$.

(a) Scrivere tutte le soluzioni, nella forma algebrica $a + ib$:

$$\boxed{i, \qquad -2+i, \qquad -2-i, \qquad -i}$$

(b) Disegnare tutte le soluzioni sul piano complesso:

Motivare le risposte, riportando i calcoli:

Domande di teoria

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Prima prova in itinere.** **16 novembre 2009** **Compito C**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.
Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia $f(x) = \dfrac{\arctan(\sqrt[5]{x}) - e^{\sqrt[5]{x}} + 1}{\ln(1 + \tan\sqrt[5]{x})}$

   (a) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0} f(x)$. Risposta: $\boxed{0}$

   (b) Esistono un numero $K \neq 0$ e un numero $\alpha > 0$ per i quali si abbia $f(x) \sim Kx^\alpha$, per $x \to 0$? In caso affermativo, determinare una tale funzione Kx^α. Risposta: $\boxed{-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}}$

   (c) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in un intorno del punto $x_0 = 0$.

   Giustificare le risposte, riportando i calcoli:

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{2e^x}$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Insieme di definizione di f: $(0, +\infty)$
Limiti agli estremi: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$
Eventuali asintoti: $x = 0$ (asintoto verticale); $y = 0$ (asintoto orizzontale).
Derivata prima: $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1 - \ln x\right)$
Qual è il più grande intervallo sul quale f è crescente? $(0, 1]$ Qual è il più grande intervallo sul quale f è decrescente? $[1, +\infty)$
Eventuali punti di massimo locale: Eventuali punti di minimo locale: L'unico punto di massimo locale è $x_0 = 1$, non ci sono punti di minimo locali.
Derivata seconda: $f''(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\left(1 + \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$
Studio della convessità e della concavità : f è concava su $(0, x_0)$, f è convessa su $(x_0, +\infty)$, ove $x_0 > 1$ (si deduce da un confronto grafico)
Disegnare un grafico qualitativo della funzione $f(x)$:
Disegnare un grafico qualitativo della funzione $\lvert f(x)\rvert$:
Esistono punti in cui la funzione $\lvert f(x)\rvert$ *non* è derivabile? Motivare la risposta. La funzione $\lvert f(x)\rvert$ non è derivabile in $x_0 = \frac{1}{e}$.

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |\tan x|^a \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali eventuali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x_0 = 0$.

Risposta: $\boxed{f \text{ è continua in } x_0 = 0 \text{ se } a > 0}$

(b) Usando la definizione di derivata, determinare gli eventuali $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f è derivabile in $x_0 = 0$.

Risposta: $\boxed{f \text{ è derivabile in } x_0 = 0 \text{ se } a > 1}$

Giustificare le risposte, riportando i calcoli:

4. Si consideri l'equazione

$$(z-i)^4 = (1-i)^4$$

nel campo complesso $\mathbb{C}$.

(a) Scrivere tutte le soluzioni, nella forma algebrica $a+ib$:

$$\boxed{1+2i, \qquad -1+2i, \qquad -1, \qquad 1}$$

(b) Disegnare tutte le soluzioni sul piano complesso:

Motivare le risposte, riportando i calcoli:

Domande di teoria

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale	Teoria

Analisi e Geometria 1 **Prima prova in itinere.** **16 novembre 2009** **Compito D**	**Docente:**	**Politecnico di Milano** **Ingegneria Industriale**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Punteggi degli esercizi: Es.1: 6 punti; Es.2: 12 punti; Es.3: 6 punti; Es.4: 6 punti.
Istruzioni: *Riportare le soluzioni nelle caselle. Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.*

1. Sia $f(x) = \dfrac{\tan(\sqrt[5]{x}) - e^{\sqrt[5]{x}} + 1}{\ln(1 - \arctan \sqrt[5]{x})}$

   (a) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x \to 0} f(x)$. Risposta: $\boxed{0}$

   (b) Esistono un numero $K \neq 0$ e un numero $\alpha > 0$ per i quali si abbia $f(x) \sim Kx^{\alpha}$, per $x \to 0$? In caso affermativo, determinare una tale funzione Kx^{α}. Risposta: $\boxed{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}}$

   (c) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in un intorno del punto $x_0 = 0$.

   Giustificare le risposte, riportando i calcoli:

2. Studiare la funzione

$$f(x) = -\frac{1+\ln x}{2e^x}$$

Riportare in tabella i risultati e il grafico. Riportare concisamente i calcoli sul retro del foglio.

Insieme di definizione di f: $(0, +\infty)$
Limiti agli estremi: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$
Eventuali asintoti: $x = 0$ (asintoto verticale); $y = 0$ (asintoto orizzontale).
Derivata prima: $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\left(-\frac{1}{x} + 1 + \ln x\right)$
Qual è il più grande intervallo sul quale f è crescente? $[1, +\infty)$ Qual è il più grande intervallo sul quale f è decrescente? $(0, 1]$
Eventuali punti di massimo locale: Eventuali punti di minimo locale: L'unico punto di minimo locale è $x_0 = 1$, non ci sono punti di massimo locali.
Derivata seconda: $f''(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\left(-1 - \ln x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$
Studio della convessità e della concavità : f è convessa su $(0, x_0)$, f è concava su $(x_0, +\infty)$, ove $x_0 > 1$ (si deduce da un confronto grafico)
Disegnare un grafico qualitativo della funzione $f(x)$:
Disegnare un grafico qualitativo della funzione $\lvert f(x)\rvert$:
Esistono punti in cui la funzione $\lvert f(x)\rvert$ *non* è derivabile? Motivare la risposta. La funzione $\lvert f(x)\rvert$ non è derivabile in $x_0 = \frac{1}{e}$.

3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |\tan x|^a \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali eventuali $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua in $x_0 = 0$.

Risposta: f è continua in $x_0 = 0$ se $a > 0$

(b) Usando la definizione di derivata, determinare gli eventuali $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f è derivabile in $x_0 = 0$.

Risposta: f è derivabile in $x_0 = 0$ se $a > 1$

Giustificare le risposte, riportando i calcoli:

4. Si consideri l'equazione

$$(z+1)^4 = (1+i)^4$$

nel campo complesso $\mathbb{C}$.

(a) Scrivere tutte le soluzioni, nella forma algebrica $a + ib$:

$$\boxed{1, \qquad -1, \qquad -1-2i, \qquad 1-2i}$$

(b) Disegnare tutte le soluzioni sul piano complesso:

Motivare le risposte, riportando i calcoli:

Domande di teoria