1. Sia
$$S = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \operatorname{artg} \frac{n}{1+n^2}\,.$$
   (a) Stabilire se la serie data converge assolutamente.
   (b) Stabilire se la serie data converge.

2. Sia $\mathscr{L}$ lo spazio delle funzioni lisce su $\mathbb{R}$ e sia $L : \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ l'operatore lineare definito da
$$L(y) = y'' + 4y' + 4y$$
per ogni $y \in \mathscr{L}$.
   (a) Determinare l'autospazio $V_1$ di $L$ relativo all'autovalore $\lambda = 1$.
   (b) Determinare le funzioni appartenenti a $V_1$ che ammettono nel punto $(0, 1)$ un massimo.
   (c) Determinare il nucleo $V_0$ di $L$.
   (d) Determinare le funzioni appartenenti a $V_0$ che passano per i punti $P_1 \equiv (-1, -\mathrm{e}^2)$ e $P_2 \equiv (1, 3\mathrm{e}^{-2})$.
   (e) Determinare tutte le controimmagini della funzione $q(x) = (x^2 + x)\,\mathrm{e}^{2x}$ mediante $L$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $2\pi$-periodica dispari definita da
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in [0, \pi/2) \\ 0 & x \in [\pi/2, \pi]\,. \end{cases}$$
   (a) Disegnare il grafico della funzione $f$ sull'intervallo $[-3\pi, \pi]$.
   (b) Stabilire se la serie di Fourier di $f$ converge in media quadratica.
   (c) Stabilire se la serie di Fourier di $f$ converge puntualmente.
   (d) Scrivere la serie di Fourier di $f$.
   (e) Dire cosa accade per $x = \frac{\pi}{4}$.
   (f) Scrivere l'identità di Parseval per la funzione $f$.

**Tempo**: 2 ore.

**Soluzioni**

1. La serie $S$ è a segni alterni.
$$S = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \operatorname{artg} \frac{n}{1+n^2} .$$
   (a) Poiché
   $$a_n = \operatorname{artg} \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n} \qquad \text{per } n \to +\infty ,$$
   la serie $S$ non converge assolutamente.

   (b) La successione $a_n$ è positiva e tende a zero per $n \to +\infty$. Inoltre è decrescente. Infatti, se consideriamo la funzione $f$ definita da
   $$f(x) = \operatorname{artg} \frac{x}{1+x^2}$$
   per $x \geq 0$, si ha
   $$f'(x) = \frac{1-x^2}{1+3x^2+x^4} .$$
   Poiché $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \geq 1$, si ha che la funzione $f$ è decrescente per ogni $x \geq 1$. Di conseguenza, anche la successione $a_n$ è decrescente $n \geq 1$. Quindi, per il criterio di Leibniz, la serie $S$ converge.

2. (a) L'autospazio di $L$ relativo all'autovalore $\lambda = 1$ è il sottospazio $V_1$ determinato dall'equazione $L(y) = y$, ossia dall'equazione
   $$y'' + 4y' + 4y = y$$
   che equivale all'equazione differenziale omogenea
   $$y'' + 4y' + 3y = 0 .$$
   L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ e ha come soluzioni $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$. Pertanto
   $$V_1 = \langle \mathrm{e}^{-x}, \mathrm{e}^{-3x} \rangle = \{ c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{-3x} \ : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \} .$$

   (b) Dobbiamo determinare le funzioni $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{-3x}$ tali che $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Si tratta quindi di un problema di Cauchy. Di conseguenza esiste un'unica funzione che soddisfa queste condizioni. Bisogna poi verificare che effettivamente presenta un massimo nel punto dato. Poiché
   $$\begin{cases} y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{-3x} \\ y'(x) = -c_1 \mathrm{e}^{-x} - 3c_2 \mathrm{e}^{-3x} , \end{cases}$$
   si ha
   $$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 \\ y'(0) = -c_1 - 3c_2 , \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 0 = -c_1 - 3c_2 , \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{3}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{2} . \end{cases}$$
   La soluzione cercata è pertanto
   $$y(x) = \frac{3}{2} \, \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2} \, \mathrm{e}^{-3x} .$$
   Derivando, si ha
   $$y'(x) = -\frac{3}{2} \, \mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2} \, \mathrm{e}^{-3x} = \frac{3}{2} \, \mathrm{e}^{-x} (-1 + \mathrm{e}^{-2x}) .$$
   Pertanto $y'(x) \geq 0$ se e solo se $-1 + \mathrm{e}^{-2x} \geq 0$, ossia $\mathrm{e}^{-2x} \geq 1$, ossia $-2x \geq 0$, ossia $x \leq 0$. Quindi, effettivamente la funzione trovata ammette un massimo per $x = 0$.

(c) Il nucleo di $L$ è determinato dall'equazione omogenea $L(y) = 0$, ossia dall'equazione differenziale

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0 \,.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ e quindi $\lambda = 2$ (con molteplicità $2$). Pertanto, l'integrale generale è

$$\widetilde{y}(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 x \mathrm{e}^{-2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ossia

$$V_0 = \langle \mathrm{e}^{-2x}, x\mathrm{e}^{-2x} \rangle = \{c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 x \mathrm{e}^{-2x} \;:\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \,.$$

(d) Dobbiamo determinare tutte le funzioni $y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 x \mathrm{e}^{-2x}$ tali che

$$\begin{cases} y(-1) = -\mathrm{e}^2 \\ y(1) = 3\mathrm{e}^{-2} \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} c_1 \mathrm{e}^2 - c_2 \mathrm{e}^2 = -\mathrm{e}^2 \\ c_1 \mathrm{e}^{-2} + c_2 \mathrm{e}^{-2} = 3\mathrm{e}^{-2} \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} c_1 - c_2 = -1 \\ c_1 + c_2 = 3 \,. \end{cases}$$

Questo sistema ammette un'unica soluzione, data da $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$. Abbiamo quindi l'unica funzione $y(x) = (1 + 2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

(e) Si tratta di risolvere l'equazione $L(y) = q$, ossia di risolvere l'equazione differenziale

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = (x^2 + x)\,\mathrm{e}^{2x} \,.$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata lo abbiamo già determinato in uno dei punti precedenti ed è dato da

$$\widetilde{y}(x) = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 x \mathrm{e}^{-2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa, utilizzando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Cerchiamo quindi una soluzione della forma

$$\overline{y}(x) = c_1(x)\mathrm{e}^{-2x} + c_2(x) x \mathrm{e}^{-2x} \,.$$

Allora, deve essere

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-2x} c_1'(x) + x\mathrm{e}^{-2x} c_2'(x) = 0 \\ -2\mathrm{e}^{-2x} c_1'(x) + (1 - 2x)\mathrm{e}^{-2x} c_2'(x) = (x^2 + x)\,\mathrm{e}^{2x} \,. \end{cases}$$

Il determinate della matrice dei coefficienti è

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & x\mathrm{e}^{-2x} \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & (1-2x)\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{-2x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1 - 2x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-4x} \,.$$

Quindi, si ha

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \frac{1}{\Delta(x)} \begin{vmatrix} 0 & x\mathrm{e}^{-2x} \\ (x^2+x)\mathrm{e}^{-2x} & (1-2x)\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^{4x} x (x^2 + x)\mathrm{e}^{-4x} = -x^3 - x^2 \\ c_2'(x) &= \frac{1}{\Delta(x)} \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ -2\mathrm{e}^{-2x} & (x^2+x)\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{4x}(x^2 + x)\mathrm{e}^{-4x} = x^2 + x \,. \end{aligned}$$

Integrando, si ha

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int (x^3 + x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \\ c_2'(x) &= \int (x^2 + x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

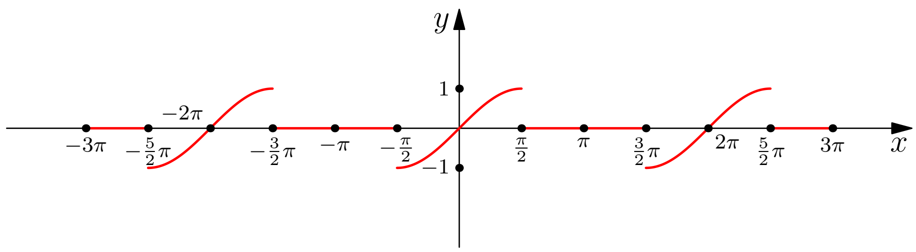
e quindi

$$\begin{aligned}
\overline{y}(x) &= \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right) \mathrm{e}^{-2x} + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) x\, \mathrm{e}^{-2x} \\
&= \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{2}\right) \mathrm{e}^{-2x} \\
&= \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6}\right) \mathrm{e}^{-2x} .
\end{aligned}$$

In conclusione, l'integrale generale dell'equazione completa di partenza è

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + \overline{y}(x) = \left(c_1 + c_2 x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6}\right) \mathrm{e}^{-2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

3. (a) Il grafico della funzione $f$ sull'intervallo $[-3\pi, \pi]$ è




(b) La funzione $f$ è di classe $L^2$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, ossia $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x < +\infty$. Pertanto la serie di Fourier di $f$ converge in media quadratica.

(c) La funzione $f$ è regolare a tratti sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Pertanto la serie di Fourier di $f$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(d) Poiché $f$ è dispari, si ha $a_n = 0$ e

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \sin nx \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \left( \big[ -\cos x \sin nx \big]_0^{\pi/2} + n \int_0^{\pi/2} \cos x \cos nx \, \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos nx \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2n}{\pi} \left( \big[ \sin x \cos nx \big]_0^{\pi/2} - n \int_0^{\pi/2} \sin x \sin nx \, \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2n}{\pi} \cos n\frac{\pi}{2} - \frac{2n^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \sin nx \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2n}{\pi} \cos n\frac{\pi}{2} - n^2 b_n
\end{aligned}$$

ossia

$$(1 - n^2) b_n = \frac{2n}{\pi} \cos n\frac{\pi}{2} .$$

Pertanto, se $n \neq 1$, si ha

$$b_n = \frac{2}{\pi} \frac{n}{1 - n^2} \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{n/2} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{n}{1-n^2} & \text{per } n \text{ pari} \\ 0 & \text{per } n \text{ dispari} . \end{cases}$$

Se invece $n = 1$, si ha

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\,.$$

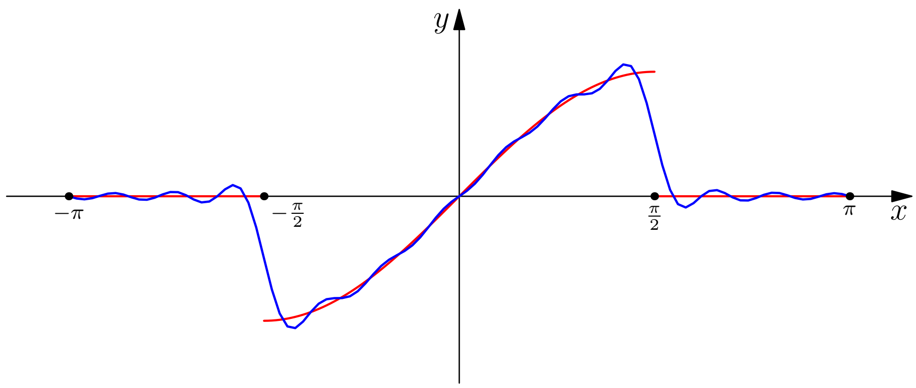
Pertanto, si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}(-1)^n \,\frac{2n}{1-4n^2}\,\sin 2nx\,.$$

o anche

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1} \,\frac{n}{4n^2-1}\,\sin 2nx\,.$$

Osservazione. Nella seguente figura




si può vedere l'approssimazione della funzione $f$ con il polinomio trigonometrico

$$F_{12}(x) = \frac{\sin x}{2} + \frac{4}{3}\frac{\sin 2x}{\pi} - \frac{8}{15}\frac{\sin 4x}{\pi} + \frac{12}{35}\frac{\sin 6x}{\pi} - \frac{16}{63}\frac{\sin 8x}{\pi} + \frac{20}{99}\frac{\sin 10x}{\pi} - \frac{24}{143}\frac{\sin 12x}{\pi}\,.$$

(e) In $x = \frac{\pi}{4}$ la funzione $f$ è continua. Quindi la serie di Fourier di $f$ converge a $f(\frac{\pi}{4})$, ossia

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\,\frac{n}{4n^2-1}\,\sin n\frac{\pi}{2}$$

ossia

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0}(-1)^{2n+1-1}\,\frac{2n+1}{4(2n+1)^2-1}\,(-1)^n$$

ossia

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\,\frac{2n+1}{4(2n+1)^2-1}$$

ossia

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\,\frac{2n+1}{4(2n+1)^2-1} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}\,.$$

(f) Poiché $f \in L^2([-\pi,\pi])$, vale l'identità di Parseval. Poiché $f$ è dispari, tale identità diventa

$$\sum_{n\geq 1} b_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Nel nostro caso, si ha

$$\sum_{n\geq 1} b_n^2 = b_1^2 + \sum_{n\geq 1} b_{2n}^2 = \frac{1}{4} + \sum_{n\geq 1}\left((-1)^{n/2}\frac{2}{\pi}\,\frac{n}{1-n^2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{4n^2}{(4n^2-1)^2}$$

e

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\,.$$

Pertanto, si ha

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{4n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{2}$$

ossia

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ossia

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}\,.$$