Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **5 maggio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati.**

1. (a) Scrivere la definizione di *rango* di una matrice A di tipo $m \times n$.

   (b) Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$S(x, y, z) = (x + 3y + 4z, 2x + y + 3z, -x + 2y + z)$$

   i. Trovare la matrice A che rappresenta S rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   ii. Trovare la dimensione dello spazio immagine $\text{Im } S$.

   iii. Trovare una base di $\text{Ker } A$ (il nucleo di A).

   iv. Trovare tutti gli eventuali valori di h per i quali il vettore $w = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1+h \end{vmatrix}$ non appartiene all'immagine di S. Motivare la risposta.

   v. L'applicazione lineare S è iniettiva? Motivare la risposta.

Soluzione.

(a)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(b) $\dim(\text{Im } S) = \text{rk } A = 2$.

(c) Una base di $\text{Ker } A$ è il vettore $(-1, -1, 1)$.

(d) Riduciamo a scala la matrice completa $[A, w]$ del sistema lineare $AX = w$:

$$[A, w] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1+h \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 3+h \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2+h \end{vmatrix}$$

Il vettore w non appartiene all'immagine di S se, e solo se, il rango di $[A, w]$ è diverso dal rango di A, cioè se e solo se $h \neq -2$.

(e) S non è iniettiva. (Perché $\text{Ker } S \neq 0$).

2. Sia A una matrice quadrata con un autovettore v relativo all'autovalore $\lambda = 2$. Dimostrare che v è anche autovettore della matrice $M = A^3 - 3A$ e determinare il corrispondente autovalore di M.

Soluzione. Per ipotesi, v è un vettore non nullo per il quale $Av = \lambda v$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} A^2 v &= A(Av) \\ &= A(\lambda v) \\ &= \lambda(Av) \\ &= \lambda^2 v \end{aligned}$$

In modo simile, $A^3(v) = A(A^2 v) = A(\lambda^2 v) = \lambda^2(Av) = \lambda^3 v$. (Piú in generale, $A^n v = \lambda^n v$, per ogni intero positivo n). Dunque

$$(A^3 - 3A)v = A^3 v - 3Av = \lambda^3 v - 3\lambda v = (\lambda^3 - 3\lambda)v$$

Dunque v è anche autovettore di $A^3 - 3A$, con autovalore $\lambda^3 - 3\lambda$. Con $\lambda = 2$, l'autovalore è uguale a $2^3 - 3 \cdot 2 = 2$.

3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

(a) Date due soluzioni del sistema, $\mathbf{u_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, la funzione $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è soluzione? Giustificare la risposta.

(b) Risolvere il sistema.

(c) Determinare la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(4, 0)$.

Soluzione

(a) La risposta è affermativa. Infatti, l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale. In particolare, associamo al sistema la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$ sono soluzioni del sistema, allora

$$\mathbf{u_1}' = A\mathbf{u_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{u_2}' = A\mathbf{u_2}.$$

Dalla linearità segue che

$$(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2})' = \mathbf{u_1}' + \mathbf{u_2}' = A\mathbf{u_1} + A\mathbf{u_2} = A(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}),$$

da cui la tesi.

(b) Cerchiamo autovalori e autovettori della matrice A associata al sistema. L'equazione caratteristica di A è

$$\left|A - \lambda I\right| = \lambda^2 - 4 = 0,$$

le cui radici sono gli autovalori della matrice, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_1 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A - 2I\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$, al variare di y in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_2 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A + 2I\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} -3y \\ y \end{bmatrix}$, al variare di y in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

L'integrale generale del sistema è quindi l'insieme delle funzioni

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 = 4 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

si ottinene la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(4, 0)$:

$$\mathbf{u}(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{-2t} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Sia f la funzione dispari di periodo 2π tale che

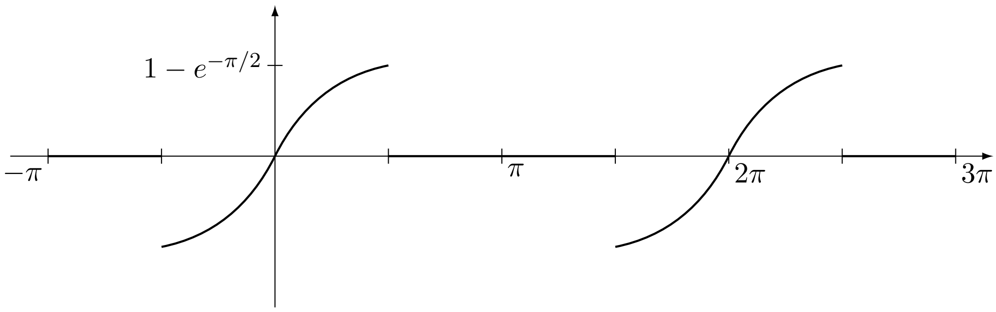
$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

(a) Si tracci il grafico di f nell'intervallo $(-\pi, 3\pi)$

(b) Si scriva l'espressione dei coefficienti di Fourier di f senza calcolarli

(c) Si dica in quali punti dell'intervallo $[0, 2\pi)$ la serie di Fourier converge e per questi punti si dica a cosa converge (si giustifichi la risposta enunciando con precisione il risultato teorico utilizzato).

Soluzione



(a)

(b) Essendo la funzione dispari $a_n = 0$ per $0 \le n < \infty$ e $b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} (1 - e^{-x}) \sin nx \, dx$ per $1 \le n < \infty$.

(c) La serie di Fourier converge in ogni punto dell'intervallo ad $f(x)$ eccetto i punti $x = \dfrac{\pi}{2}$ in cui converge a $(1 - e^{-\pi/2})/2$ e $x = \dfrac{3\pi}{2}$ in cui converge a $(e^{-\pi/2} - 1)/2$ (dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier, v. libri di testo).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **5 maggio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati.**

1. (a) Scrivere la definizione di *dimensione* di uno spazio vettoriale V.

   (b) Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$S(x, y, z) = (x + 3y + 4z, 3x + y + 2z, -x + 5y + 6z)$$

   i. Trovare la matrice A che rappresenta S rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   ii. Trovare la dimensione dello spazio immagine $\operatorname{Im} S$.

   iii. Trovare una base di $\operatorname{Ker} A$ (il nucleo di A).

   iv. Trovare tutti gli eventuali valori di h per i quali il vettore $w = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 2+h \end{vmatrix}$ appartiene all'immagine di S. Motivare la risposta.

   v. L'applicazione lineare S è suriettiva? Motivare la risposta.

Soluzione.

(a)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

(b) $\dim(\operatorname{Im} S) = \operatorname{rk} A = 2$.

(c) Una base di $\operatorname{Ker} A$ è il vettore $(-1, -5, 4)$.

(d) Il vettore w appartiene all'immagine di S se, e solo se, $h = -1$.

(e) L'applicazione lineare S non è suriettiva (La dimensione del codominio è tre, mentre la dimensione dell'immagine è due).

2. Sia A una matrice quadrata con un autovettore v relativo all'autovalore $\lambda = 3$. Dimostrare che v è anche autovettore della matrice $M = A^3 - 5A$ e determinare il corrispondente autovalore di M.

   Soluzione. Il vettore v è anche autovettore di $A^3 - 5A$ con autovalore $\lambda^3 - 5\lambda$. Con $\lambda = 3$, l'autovalore è uguale a $3^3 - 5 \cdot 3 = 12$.

3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$$

(a) Data una soluzione del sistema, $\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, la funzione $-\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è soluzione? Giustificare la risposta.

(b) Risolvere il sistema.

(c) Determinare la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(1, -1)$.

Soluzione

(a) La risposta è affermativa. Infatti, l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale. In particolare, associamo al sistema la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{u}$ è soluzione del sistema, allora $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$. Dalla linearità segue che

$$(-\mathbf{u})' = -\mathbf{u}' = -A\mathbf{u} = A(-\mathbf{u}),$$

da cui la tesi.

(b) Cerchiamo autovalori e autovettori della matrice A associata al sistema. L'equazione caratteristica di A è

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - 1 = 0,$$

le cui radici sono gli autovalori della matrice, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_1 risolviamo il sistema omogeneo

$$(A - I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} x \\ 3x \end{bmatrix}$, al variare di x in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_2 risolviamo il sistema omogeneo

$$(A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$, al variare di x in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

L'integrale generale del sistema è quindi l'insieme delle funzioni

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 + c_2 = -1 \end{cases}$$

si ottinene la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(1, -1)$:

$$\mathbf{u}(t) = -e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Sia f la funzione pari di periodo 2π tale che

$$f(x) = \begin{cases} \log(x+1) - 1 & 0 \le x \le \pi/2 \\ 1 & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

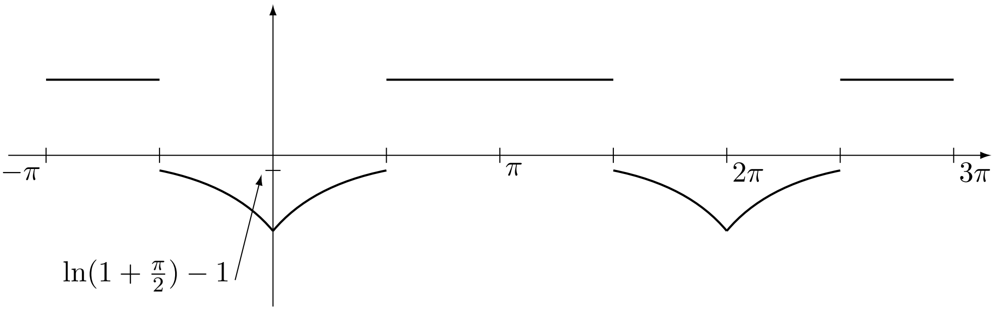
(a) Si tracci il grafico di f nell'intervallo $(-\pi, 3\pi)$

(b) Si scriva l'espressione dei coefficienti di Fourier di f senza calcolarli

(c) Si dica in quali punti dell'intervallo $[0, 2\pi)$ la serie di Fourier converge e per questi punti si dica a cosa converge (si giustifichi la risposta enunciando con precisione il risultato teorico utilizzato).

Soluzione

(a)



(b) Essendo la funzione pari $b_n = 0$ per $1 \le n < \infty$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \big(\log(x+1) - 1\big)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 1\, dx$$

e per $1 \le n < \infty$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \big(\log(x+1) - 1\big) \cos nx\, dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx\, dx.$$

(c) La serie di Fourier converge in ogni punto dell'intervallo ad $f(x)$ eccetto i punti $x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ in cui converge a $\dfrac{1}{2}\log(\pi/2 + 1)$ (dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier, v. libri di testo).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **5 maggio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati.

1. (a) Scrivere la definizione di *rango* di una matrice A di tipo $m \times n$.

   (b) Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

   $$S(x, y, z) = (x + 4y + 3z, 2x + y - z, -x + 3y + 4z)$$

   i. Trovare la matrice A che rappresenta S rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   ii. Trovare la dimensione dello spazio immagine $\operatorname{Im} S$.

   iii. Trovare una base di $\operatorname{Ker} A$ (il nucleo di A).

   iv. Trovare tutti gli eventuali valori di h per i quali il vettore $w = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1+h \end{vmatrix}$ non appartiene all'immagine di S. Motivare la risposta.

   v. L'applicazione lineare S è iniettiva? Motivare la risposta.

Soluzione.

(a)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(b) $\dim(\operatorname{Im} S) = \operatorname{rk} A = 2$.

(c) Una base di $\operatorname{Ker} A$ è il vettore $(1, -1, 1)$.

(d) Il vettore w non appartiene all'immagine di S se, e solo se, $h \neq -3$.

(e) L'applicazione lineare S non è iniettiva. (Perché $\operatorname{Ker} S \neq 0$).

2. Sia A una matrice quadrata con un autovettore v relativo all'autovalore $\lambda = -1$. Dimostrare che v è anche autovettore della matrice $M = A^3 + 9A$ e determinare il corrispondente autovalore di M .

Soluzione. Il vettore v è anche autovettore di $A^3 + 9A$ con autovalore $\lambda^3 + 9\lambda$. Con $\lambda = -1$, l'autovalore è uguale a $(-1)^3 + 9 \cdot (-1) = -10$.

3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$$

(a) Date due soluzioni del sistema, $\mathbf{u_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, la funzione $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è soluzione? Giustificare la risposta.

(b) Risolvere il sistema.

(c) Determinare la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(1, 3)$.

Soluzione

(a) La risposta è affermativa. Infatti, l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale. In particolare, associamo al sistema la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$ sono soluzioni del sistema, allora

$$\mathbf{u_1}' = A\mathbf{u_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{u_2}' = A\mathbf{u_2}.$$

Dalla linearità segue che

$$(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2})' = \mathbf{u_1}' + \mathbf{u_2}' = A\mathbf{u_1} + A\mathbf{u_2} = A(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}),$$

da cui la tesi.

(b) Cerchiamo autovalori e autovettori della matrice A associata al sistema. L'equazione caratteristica di A è

$$\left|A - \lambda I\right| = \lambda^2 - 4 = 0,$$

le cui radici sono gli autovalori della matrice, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_1 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A - 2I\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} -5y \\ y \end{bmatrix}$, al variare di y in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_2 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A + 2I\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix}$, al variare di y in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

L'integrale generale del sistema è quindi l'insieme delle funzioni

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} -5c_1 - c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 3 \end{cases}$$

si ottinene la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(1, 3)$:

$$\mathbf{u}(t) = -e^{2t} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + 4e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Sia f la funzione dispari di periodo 2π tale che

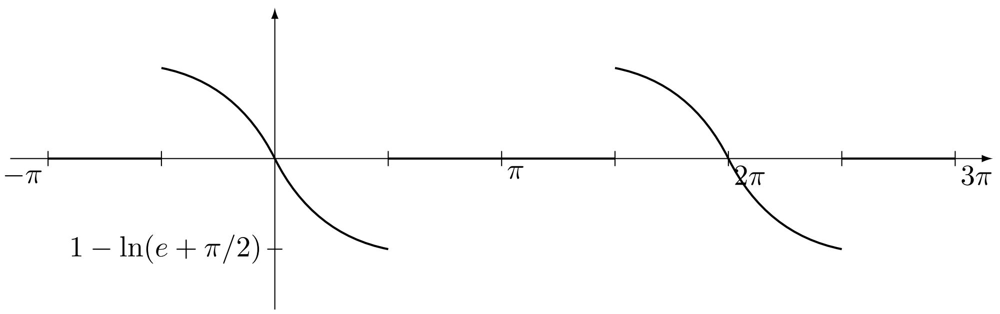
$$f(x) = \begin{cases} 1 - \log(e + x) & 0 \le x \le \pi/2 \\ \\ 0 & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

(a) Si tracci il grafico di f nell'intervallo $(-\pi, 3\pi)$

(b) Si scriva l'espressione dei coefficienti di Fourier di f senza calcolarli

(c) Si dica in quali punti dell'intervallo $[0, 2\pi)$ la serie di Fourier converge e per questi punti si dica a cosa converge (si giustifichi la risposta enunciando con precisione il risultato teorico utilizzato).

Soluzione



(a)

(b) Essendo la funzione dispari $a_n = 0$ per $0 \le n < \infty$ e
$b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} (1 - \log(e + x)) \sin nx \, dx$ per $1 \le n < \infty$.

(c) La serie di Fourier converge in ogni punto dell'intervallo ad $f(x)$ eccetto i punti $x = \dfrac{\pi}{2}$ in cui converge a $\big(1 - \log(e + \pi/2)\big)/2$ e $x = \dfrac{3\pi}{2}$ in cui converge a $\big(\log(e + \pi/2) - 1\big)/2$ (dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier, v. libri di testo).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **5 maggio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati.**

1. (a) Siano V e W spazi vettoriali. Scrivere la definizione di applicazione *lineare* da V a W.

   (b) Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$S(x,y,z) = (x+y+z, 2x-y+z, -x+2y)$$

   i. Trovare la matrice A che rappresenta S rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   ii. Trovare la dimensione dello spazio immagine $\operatorname{Im} S$.

   iii. Trovare una base di $\operatorname{Ker} A$ (il nucleo di A).

   iv. Trovare tutti gli eventuali valori di h per i quali il vettore $w = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 2+h \end{vmatrix}$ appartiene all'immagine di S. Motivare la risposta.

   v. L'applicazione lineare S è suriettiva? Motivare la risposta.

Soluzione.

(a)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

(b) $\dim(\operatorname{Im} S) = \operatorname{rk} A = 2$.

(c) Una base di $\operatorname{Ker} A$ è il vettore $(2, 1, -3)$.

(d) Il vettore w appartiene all'immagine di S se, e solo se, $h = -4$.

(e) L'applicazione lineare S non è suriettiva. (La dimensione del codominio è tre, mentre la dimensione dell'immagine è due).

2. Sia A una matrice quadrata con un autovettore v relativo all'autovalore $\lambda = -2$. Dimostrare che v è anche autovettore della matrice $M = A^3 - 7A$ e determinare il corrispondente autovalore di M .

   Soluzione. Il vettore v è anche autovettore di $A^3 - 7A$ con autovalore $\lambda^3 - 7\lambda$. Con $\lambda = -2$, l'autovalore è uguale a $(-2)^3 - 7 \cdot (-2) = 6$.

3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 4x + y. \end{cases}$$

(a) Data una soluzione del sistema, $\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, la funzione $-\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è soluzione? Giustificare la risposta.

(b) Risolvere il sistema.

(c) Determinare la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(0, 1)$.

Soluzione

(a) La risposta è affermativa. Infatti, l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale. In particolare, associamo al sistema la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{u}$ è soluzione del sistema, allora $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$. Dalla linearità segue che

$$(-\mathbf{u})' = -\mathbf{u}' = -A\mathbf{u} = A(-\mathbf{u}),$$

da cui la tesi.

(b) Cerchiamo autovalori e autovettori della matrice A associata al sistema. L'equazione caratteristica di A è

$$\left|A - \lambda I\right| = \lambda^2 - 9 = 0,$$

le cui radici sono gli autovalori della matrice, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -3$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_1 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A - 3I\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}$, al variare di x in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_2 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A + 3I\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$, al variare di x in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

L'integrale generale del sistema è quindi l'insieme delle funzioni

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

si ottinene la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(0, 1)$:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{3} e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. Sia f la funzione pari di periodo 2π tale che

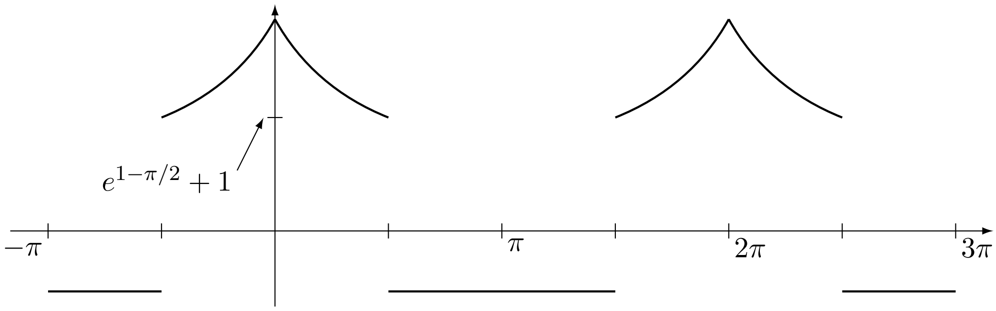
$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x}+1 & 0 \le x \le \pi/2 \\ -1 & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

(a) Si tracci il grafico di f nell'intervallo $(-\pi, 3\pi)$

(b) Si scriva l'espressione dei coefficienti di Fourier di f senza calcolarli

(c) Si dica in quali punti dell'intervallo $[0, 2\pi)$ la serie di Fourier converge e per questi punti si dica a cosa converge (si giustifichi la risposta enunciando con precisione il risultato teorico utilizzato).

Soluzione



(a)

(b) Essendo la funzione pari $b_n = 0$ per $1 \le n < \infty$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left(e^{1-x}+1\right)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 1\,dx$$

e per $1 \le n < \infty$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left(e^{1-x}+1\right)\cos nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx\,dx.$$

(c) La serie di Fourier converge in ogni punto dell'intervallo ad $f(x)$ eccetto i punti $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ in cui converge a $\frac{1}{2}e^{1-\pi/2}$ (dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier, v. libri di testo).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **5 maggio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati.**

1. (a) Scrivere la definizione di *nucleo* di un'applicazione lineare $V \xrightarrow{T} W$.

   (b) Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3,$$

   dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   i. Trovare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base (e_1, e_2, e_3).

   ii. Trovare la dimensione dello spazio generato dalle righe di A.

   iii. Trovare una base dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

   iv. Trovare gli eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore $w = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 5+h \end{vmatrix}$ appartiene all'immagine di T. Motivare la risposta.

   v. L'applicazione lineare T è suriettiva? Motivare la risposta.

Soluzione.

(a)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

(b) $\dim(\text{Im } S) = \text{rk } A = 2$.

(c) Una base di $\text{Ker } A$ è il vettore $(-2, 1, 1)$.

(d) Il vettore w appartiene all'immagine di T se, e solo se, $h = 10$.

(e) L'applicazione lineare T non è suriettiva. (La dimensione del codominio è tre, mentre la dimensione dell'immagine è due).

2. Siano A e B matrici quadrate dello stesso ordine. Supponiamo che un vettore v sia autovettore di A con autovalore $\lambda = 4$ e anche autovettore di B con autovalore $\mu = 1$. Dimostrare che v è anche autovettore della matrice $2A + 3B$ e determinarne il corrispondente autovalore.

   Soluzione. L'autovalore è $2\lambda + 3\mu = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 11$.

3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

(a) Date due soluzioni del sistema, $\mathbf{u_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, la funzione $\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è soluzione? Giustificare la risposta.

(b) Risolvere il sistema.

(c) Determinare la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(0, 1)$.

Soluzione

(a) La risposta è affermativa. Infatti, l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale. In particolare, associamo al sistema la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$ sono soluzioni del sistema, allora

$$\mathbf{u_1}' = A\mathbf{u_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{u_2}' = A\mathbf{u_2}.$$

Dalla linearità segue che

$$(\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2})' = \mathbf{u_1}' - \mathbf{u_2}' = A\mathbf{u_1} - A\mathbf{u_2} = A(\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2}),$$

da cui la tesi.

(b) Cerchiamo autovalori e autovettori della matrice A associata al sistema. L'equazione caratteristica di A è

$$\left|A - \lambda I\right| = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

le cui radici sono gli autovalori della matrice, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_1 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A - 3I\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} 2y \\ y \end{bmatrix}$, al variare di y in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_2 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A + I\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix}$, al variare di y in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

L'integrale generale del sistema è quindi l'insieme delle funzioni

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2c_1 - 2c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

si ottinene la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(0, 1)$:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2} e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Sia f la funzione pari di periodo 2π tale che

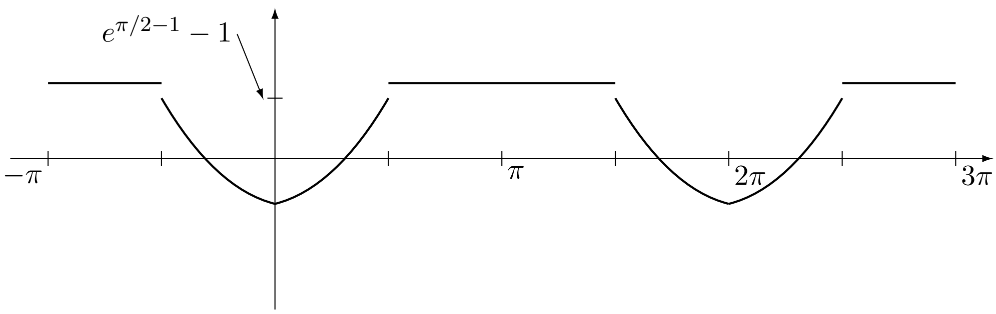
$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1 & 0 \le x \le \pi/2 \\ \\ 1 & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

(a) Si tracci il grafico di f nell'intervallo $(-\pi, 3\pi)$

(b) Si scriva l'espressione dei coefficienti di Fourier di f senza calcolarli

(c) Si dica in quali punti dell'intervallo $[0, 2\pi)$ la serie di Fourier converge e per questi punti si dica a cosa converge (si giustifichi la risposta enunciando con precisione il risultato teorico utilizzato).

Soluzione



(a)

(b) Essendo la funzione pari $b_n = 0$ per $1 \le n < \infty$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(e^{x-1} - 1\right) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} 1 \, dx$$

e per $1 \le n < \infty$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(e^{x-1} - 1\right) \cos nx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx \, dx.$$

(c) La serie di Fourier converge in ogni punto dell'intervallo ad $f(x)$ eccetto i punti $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ in cui converge a $\frac{1}{2} e^{\pi/2-1}$ (dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier, v. libri di testo).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **5 maggio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati.**

1. (a) Scrivere la definizione di *base* di uno spazio vettoriale V .

   (b) Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = 3e_1 + 3e_2 + 9e_3,$$

   dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   i. Trovare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base (e_1, e_2, e_3) .

   ii. Trovare la dimensione dello spazio generato dalle righe di A .

   iii. Trovare una base dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

   iv. Trovare gli eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore $w = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 6+h \end{vmatrix}$ appartiene all'immagine di T . Motivare la risposta.

   v. L'applicazione lineare T è iniettiva? Motivare la risposta.

Soluzione.

(a)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix}$$

(b) $\dim(\text{Im } T) = \text{rk } A = 2$.

(c) Una base di $\text{Ker } A$ è il vettore $(-3, 3, 1)$.

(d) Il vettore w appartiene all'immagine di T se, e solo se, $h = 9$.

(e) L'applicazione lineare T non è iniettiva. (Perché $\text{Ker } T \neq 0$).

2. Siano A e B matrici quadrate dello stesso ordine. Supponiamo che un vettore v sia autovettore di A con autovalore $\lambda = -1$ e anche autovettore di B con autovalore $\mu = 2$. Dimostrare che v è anche autovettore della matrice $3A + 5B$ e determinarne il corrispondente autovalore.

   Soluzione. L'autovalore è $3\lambda + 5\mu = 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = 7$.

3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = -x + 3y. \end{cases}$$

(a) Data una soluzione del sistema, $\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, la funzione $3\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è soluzione? Giustificare la risposta.

(b) Risolvere il sistema.

(c) Determinare la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(2, 1)$.

Soluzione

(a) La risposta è affermativa. Infatti, l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale. In particolare, associamo al sistema la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{u}$ è soluzione del sistema, allora $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$. Dalla linearità segue che

$$(3\mathbf{u})' = 3\mathbf{u}' = 3A\mathbf{u} = A(3\mathbf{u}),$$

da cui la tesi.

(b) Cerchiamo autovalori e autovettori della matrice A associata al sistema. L'equazione caratteristica di A è

$$\left|A - \lambda I\right| = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0,$$

le cui radici sono gli autovalori della matrice, $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_1 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A - 4I\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$, al variare di x in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_2 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A - 2I\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$, al variare di x in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

L'integrale generale del sistema è quindi l'insieme delle funzioni

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

si ottinene la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(2, 1)$:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2}e^{4t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Sia f la funzione pari di periodo 2π tale che

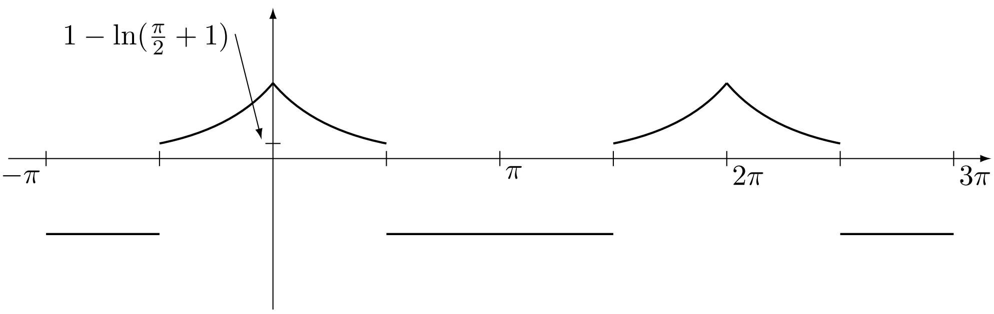
$$f(x) = \begin{cases} 1 - \log(x+1) & 0 \le x \le \pi/2 \\ \\ -1 & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

(a) Si tracci il grafico di f nell'intervallo $(-\pi, 3\pi)$

(b) Si scriva l'espressione dei coefficienti di Fourier di f senza calcolarli

(c) Si dica in quali punti dell'intervallo $[0, 2\pi)$ la serie di Fourier converge e per questi punti si dica a cosa converge (si giustifichi la risposta enunciando con precisione il risultato teorico utilizzato).

Soluzione



(a)

(b) Essendo la funzione pari $b_n = 0$ per $1 \le n < \infty$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \big(1 - \log(x+1)\big)\, dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} 1\, dx$$

e per $1 \le n < \infty$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \big(1 - \log(x+1)\big) \cos nx\, dx - \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx\, dx.$$

(c) La serie di Fourier converge in ogni punto dell'intervallo ad $f(x)$ eccetto i punti $x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ in cui converge a $-\dfrac{1}{2}\log(\pi/2+1)$ (dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier, v. libri di testo).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **5 maggio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati.**

1. (a) Scrivere la definizione di *nucleo* di un'applicazione lineare $V \xrightarrow{T} W$.

   (b) Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = -e_1 + 2e_2 - 6e_3,$$

   dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   i. Trovare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base (e_1, e_2, e_3).

   ii. Trovare la dimensione dello spazio generato dalle righe di A.

   iii. Trovare una base dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

   iv. Trovare gli eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore $w = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 7+h \end{vmatrix}$ appartiene all'immagine di T. Motivare la risposta.

   v. L'applicazione lineare T è suriettiva? Motivare la risposta.

Soluzione.

(a)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$

(b) $\dim(\operatorname{Im} T) = \operatorname{rk} A = 2$.

(c) Una base di $\operatorname{Ker} A$ è il vettore $(1, -4, 1)$.

(d) Il vettore w appartiene all'immagine di T se, e solo se, $h = 8$.

(e) L'applicazione lineare T non è suriettiva. (La dimensione del codominio è tre, mentre la dimensione dell'immagine è due).

2. Siano A e B matrici quadrate dello stesso ordine. Supponiamo che un vettore v sia autovettore di A con autovalore $\lambda = -1$ e anche autovettore di B con autovalore $\mu = 2$. Dimostrare che v è anche autovettore della matrice $7A + 9B$ e determinarne il corrispondente autovalore.

   Soluzione. L'autovalore è $7\lambda + 9\mu = 7 \cdot (-1) + 9 \cdot 2 = 11$.

3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

(a) Date due soluzioni del sistema, $\mathbf{u_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{u_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, la funzione $\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è soluzione? Giustificare la risposta.

(b) Risolvere il sistema.

(c) Determinare la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(2, 0)$.

Soluzione

(a) La risposta è affermativa. Infatti, l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale. In particolare, associamo al sistema la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$ sono soluzioni del sistema, allora

$$\mathbf{u_1}' = A\mathbf{u_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{u_2}' = A\mathbf{u_2}.$$

Dalla linearità segue che

$$(\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2})' = \mathbf{u_1}' - \mathbf{u_2}' = A\mathbf{u_1} - A\mathbf{u_2} = A(\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2}),$$

da cui la tesi.

(b) Cerchiamo autovalori e autovettori della matrice A associata al sistema. L'equazione caratteristica di A è

$$\left|A - \lambda I\right| = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0,$$

le cui radici sono gli autovalori della matrice, $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 1$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_1 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A + 3I\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$, al variare di x in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_2 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A - I\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$, al variare di x in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

L'integrale generale del sistema è quindi l'insieme delle funzioni

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

si ottinene la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(2, 0)$:

$$\mathbf{u}(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Sia f la funzione dispari di periodo 2π tale che

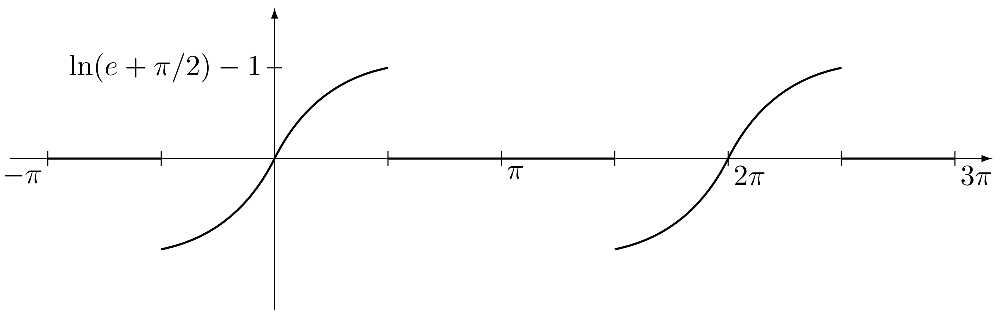
$$f(x) = \begin{cases} \log(e+x) - 1 & 0 \le x \le \pi/2 \\ \\ 0 \qquad \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

(a) Si tracci il grafico di f nell'intervallo $(-\pi, 3\pi)$

(b) Si scriva l'espressione dei coefficienti di Fourier di f senza calcolarli

(c) Si dica in quali punti dell'intervallo $[0, 2\pi)$ la serie di Fourier converge e per questi punti si dica a cosa converge (si giustifichi la risposta enunciando con precisione il risultato teorico utilizzato).

Soluzione



(a)

(b) Essendo la funzione dispari $a_n = 0$ per $0 \le n < \infty$ e
$b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\log(e+x) - 1) \sin nx \, dx$ per $1 \le n < \infty$.

(c) La serie di Fourier converge in ogni punto dell'intervallo ad $f(x)$ eccetto i punti $x = \dfrac{\pi}{2}$ in cui converge a $\big(\log(e+\pi/2) - 1\big)/2$ e $x = \dfrac{3\pi}{2}$ in cui converge a $(1 - \log(e+\pi/2))/2$ (dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier, v. libri di testo).

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **5 maggio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati.**

(a) i. Scrivere la definizione di *base* di uno spazio vettoriale V.

ii. Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad T(e_2) = e_2 - e_3, \quad T(e_3) = -2e_1 + e_2 - 9e_3,$$

dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

A. Trovare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base (e_1, e_2, e_3).

B. Trovare la dimensione dello spazio generato dalle righe di A.

C. Trovare una base dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

D. Trovare gli eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore $w = \begin{vmatrix} 4 \\ 1 \\ 8+h \end{vmatrix}$ appartiene all'immagine di T. Motivare la risposta.

E. L'applicazione lineare T è iniettiva? Motivare la risposta.

Soluzione.

(a)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

(b) $\dim(\mathrm{Im}\, T) = \mathrm{rk}\, A = 2$.

(c) Una base di $\mathrm{Ker}\, A$ è il vettore $(2, -5, 1)$.

(d) Il vettore w appartiene all'immagine di T se, e solo se, $h = 7$.

(e) L'applicazione lineare T non è iniettiva. (Perché $\mathrm{Ker}\, T \neq 0$).

(b) Siano A e B matrici quadrate dello stesso ordine. Supponiamo che un vettore v sia autovettore di A con autovalore $\lambda = 2$ e anche autovettore di B con autovalore $\mu = 1$. Dimostrare che v è anche autovettore della matrice $11A - 13B$ e determinarne il corrispondente autovalore.

Soluzione. L'autovalore è $11\lambda - 13\mu = 11 \cdot 2 - 13 \cdot 1 = 9$.

(c) Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = 2x + 9y \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

i. Data una soluzione del sistema, $\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, la funzione $3\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è soluzione? Giustificare la risposta.
ii. Risolvere il sistema.
iii. Determinare la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(3, 0)$.

Soluzione

i. La risposta è affermativa. Infatti, l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale. In particolare, associamo al sistema la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{u}$ è soluzione del sistema, allora $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$. Dalla linearità segue che

$$(3\mathbf{u})' = 3\mathbf{u}' = 3A\mathbf{u} = A(3\mathbf{u}),$$

da cui la tesi.

ii. Cerchiamo autovalori e autovettori della matrice A associata al sistema. L'equazione caratteristica di A è

$$\left|A - \lambda I\right| = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

le cui radici sono gli autovalori della matrice, $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_1 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A - 5I\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} 3y \\ y \end{bmatrix}$, al variare di y in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Per trovare gli autovettori relativi a λ_2 risolviamo il sistema omogeneo

$$\left(A + I\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui soluzioni sono i vettori di tipo $\begin{bmatrix} -3y \\ y \end{bmatrix}$, al variare di y in $\mathbb{R}$. Scegliamo l'autovettore $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

L'integrale generale del sistema è quindi l'insieme delle funzioni

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{5t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

iii. Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} 3c_1 - 3c_2 = 3 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

si ottinene la soluzione che all'istante $t = 0$ passa per il punto $(3, 0)$:

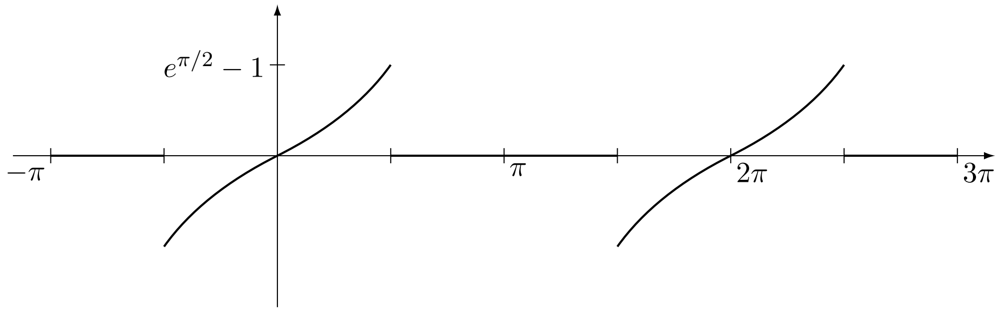
$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2} e^{5t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Sia f la funzione dispari di periodo 2π tale che

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & 0 \le x \le \pi/2 \\ \\ 0 & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

i. Si tracci il grafico di f nell'intervallo $(-\pi, 3\pi)$
ii. Si scriva l'espressione dei coefficienti di Fourier di f senza calcolarli
iii. Si dica in quali punti dell'intervallo $[0, 2\pi)$ la serie di Fourier converge e per questi punti si dica a cosa converge (si giustifichi la risposta enunciando con precisione il risultato teorico utilizzato).

Soluzione

i. 

ii. Essendo la funzione dispari $a_n = 0$ per $0 \le n < \infty$ e $b_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} (e^x - 1) \sin nx \, dx$ per $1 \le n < \infty$.

iii. La serie di Fourier converge in ogni punto dell'intervallo ad $f(x)$ eccetto i punti $x = \dfrac{\pi}{2}$ in cui converge a $\big(e^{\pi/2} - 1\big)/2$ e $x = \dfrac{3\pi}{2}$ in cui converge a $\big(1 - e^{\pi/2}\big)/2$ (dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier, v. libri di testo).