Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Primo Appello** **17 luglio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. (a) Scrivere la definizione di autovettore di una matrice quadrata.

   (b) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

   $$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3.$$

   i. Trovare la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base canonica.

   ii. Esistono basi di $\mathbb{R}^3$ costituite da autovettori di $\mathbf{A}$ a due a due ortogonali tra loro? Se esistono, se ne trovi una. (Non si richiede che gli autovettori scelti siano di lunghezza 1).

   iii. Trovare, se esiste, una matrice ortogonale $\mathbf{P}$ tale che $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ sia diagonale.

   iv. Scrivere una matrice diagonale, se esiste, che sia simile alla matrice $\mathbf{A}$.

   v. La matrice $\mathbf{A}^4$ ha una base ortonormale di autovettori? Perché?

2. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -3x(e^z+1)\mathbf{i} + 2(y+z^2)\mathbf{j} + 3(e^z+z)\mathbf{k},$$

calcolare il flusso Φ di $\mathbf{F}$ uscente dalla piramide $\mathcal{P}$ avente i vertici in

$$O(0,0,0), \quad A(2,0,0), \quad B(0,4,0), \quad C(0,0,4).$$

(*Suggerimento: i punti A, B e C appartengono al piano* $2x+y+z=4$.)

3. Trovare il massimo assoluto e il minimo assoluto di $f(x, y) = xy + 4$ sull'ellisse C di equazione $g(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$.

4. Si determini il carattere delle seguenti serie, enunciando con precisione il criterio utilizzato:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^3 + 2n \log n + \sqrt{n}}{5n^4 + n^2 e^{-n} + n + 3} \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\, 3^n}{n^n}$$

5. Si consideri l'equazione differenziale

$$x''(t) + k^2 x(t) = \cos(t),$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(a) Al variare di $k \geq 0$ si risolva l'equazione.

(b) Nel caso $k = 1$ si dia un'interpretazione fisica del risultato ottenuto.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Primo Appello** **17 luglio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. (a) Scrivere la definizione di autovettore di una matrice quadrata.

   (b) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3.$$

   i. Trovare la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base canonica.

   ii. Esistono basi di $\mathbb{R}^3$ costituite da autovettori di $\mathbf{A}$ a due a due ortogonali tra loro? Se esistono, se ne trovi una. (Non si richiede che gli autovettori scelti siano di lunghezza 1).

   iii. Trovare, se esiste, una matrice ortogonale $\mathbf{P}$ tale che $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ sia diagonale.

   iv. Scrivere una matrice diagonale, se esiste, che sia simile alla matrice $\mathbf{A}$.

   v. La matrice $\mathbf{A}^4$ ha una base ortonormale di autovettori? Perché?

2. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 5(x+yz)\mathbf{i} + (3y - 6ye^z)\mathbf{j} + 6(e^z - x)\mathbf{k},$$

calcolare il flusso Φ di $\mathbf{F}$ uscente dalla piramide $\mathcal{P}$ avente i vertici in

$$O(0,0,0), \quad A(1,0,0), \quad B(0,3,0), \quad C(0,0,6).$$

(*Suggerimento: i punti A, B e C appartengono al piano* $6x+2y+z=6$.)

3. Trovare il massimo assoluto e il minimo assoluto di $f(x,y) = xy - 4$ sull'ellisse C di equazione $g(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$.

4. Si determini il carattere delle seguenti serie, enunciando con precisione il criterio utilizzato:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2 + 2ne^{-n} + n\log n}{n^4 + n^2 \log n + 1} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\, 2^n}{n^n}$$

5. Si consideri l'equazione differenziale
$$x''(t) - kx'(t) = 0,$$
con $k \in \mathbb{R}$.

   (a) Qual'è la struttura dell'integrale generale dell'equazione precedente?

   (b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si risolva l'equazione non omogenea
$$x''(t) - kx'(t) = e^{2t}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Primo Appello** **17 luglio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. (a) Scrivere la definizione di autovettore di una matrice quadrata.

   (b) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = -3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_3.$$

   i. Trovare la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base canonica.

   ii. Esistono basi di $\mathbb{R}^3$ costituite da autovettori di $\mathbf{A}$ a due a due ortogonali tra loro? Se esistono, se ne trovi una. (Non si richiede che gli autovettori scelti siano di lunghezza 1).

   iii. Trovare, se esiste, una matrice ortogonale $\mathbf{P}$ tale che $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ sia diagonale.

   iv. Scrivere una matrice diagonale, se esiste, che sia simile alla matrice $\mathbf{A}$.

   v. La matrice $\mathbf{A}^4$ ha una base ortonormale di autovettori? Perché?

2. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2(x + y^2)\mathbf{i} + y(e^z + 1)\mathbf{j} - (e^z - z)\mathbf{k},$$

calcolare il flusso Φ di $\mathbf{F}$ uscente dalla piramide $\mathcal{P}$ avente i vertici in

$$O(0,0,0), \quad A(2,0,0), \quad B(0,6,0), \quad C(0,0,6).$$

(*Suggerimento: i punti A, B e C appartengono al piano* $3x + y + z = 6$.)

3. Trovare il massimo assoluto e il minimo assoluto di $f(x,y) = xy+1$ sull'ellisse C di equazione $g(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 4 = 0$.

4. Si determini il carattere della seguenti serie, enunciando con precisione il criterio utilizzato:

$$a) \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + 2n^2 + e^{-n}}{n^3 + n^2 \log n + 5} \qquad b) \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!\, 2^n}$$

5. Si consideri l'equazione differenziale

$$x''(t) + k^2 x(t) = \sin(2t),$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(a) Al variare di $k \geq 0$ si risolva l'equazione.

(b) Nel caso $k = 2$, si dia un'interpretazione fisica del risultato ottenuto.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Primo Appello** **17 luglio 2009**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. (a) Scrivere la definizione di autovettore di una matrice quadrata.

   (b) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3.$$

   i. Trovare la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base canonica.

   ii. Esistono basi di $\mathbb{R}^3$ costituite da autovettori di $\mathbf{A}$ a due a due ortogonali tra loro? Se esistono, se ne trovi una. (Non si richiede che gli autovettori scelti siano di lunghezza 1).

   iii. Trovare, se esiste, una matrice ortogonale $\mathbf{P}$ tale che $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ sia diagonale.

   iv. Scrivere una matrice diagonale, se esiste, che sia simile alla matrice $\mathbf{A}$.

   v. La matrice $\mathbf{A}^4$ ha una base ortonormale di autovettori? Perché?

2. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -2x(e^z - e^y)\mathbf{i} + (ye^z - 2e^y)\mathbf{j} + (e^z + 3z)\mathbf{k},$$

calcolare il flusso Φ di $\mathbf{F}$ uscente dalla piramide $\mathcal{P}$ avente i vertici in

$$O(0,0,0), \quad A(1,0,0), \quad B(0,1,0), \quad C(0,0,2).$$

(*Suggerimento: i punti A, B e C appartengono al piano* $2x + 2y + z = 2$.)

3. Trovare il massimo assoluto e il minimo assoluto di $f(x, y) = xy - 1$ sull'ellisse C di equazione $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 4 = 0$.

4. Si determini il carattere delle seguenti serie, enunciando con precisione il criterio utilizzato:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 2n^2 + e^{-n}}{n^5 + n^2 \log n + 3} \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!\, 3^n}$$

5. Si consideri l'equazione differenziale
$$x''(t) + kx'(t) = 0,$$
con $k \in \mathbb{R}$.

   (a) Qual'è la struttura dell'integrale generale dell'equazione precedente?

   (b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si risolva l'equazione non omogenea
$$x''(t) + kx'(t) = e^{-t}.$$