

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 Docente:		Terzo Appello 16 febbraio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. (a) Sia \mathbf{A} una matrice $m \times n$, e sia \mathbf{A}^T la sua trasposta.
 La matrice $(\mathbf{A}^T)\mathbf{A}$ è una matrice quadrata anche quando $m \neq n$?
 E' una matrice simmetrica ?
 E' diagonalizzabile ?

- (b) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

si calcoli il prodotto $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^T)\mathbf{A}$, e si trovino una matrice invertibile \mathbf{S} e una matrice diagonale \mathbf{D} tali che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} = \mathbf{D}$.

2. Stabilire per quali valori del parametro reale a il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(y^2 - a \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left(2xy + a \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{j}$$

è irrotazionale nel suo insieme di definizione. Si calcoli poi il lavoro del campo lungo la circonferenza C con centro nell'origine e raggio unitario, percorsa in senso antiorario.

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il campo è conservativo nel suo insieme di definizione ?

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il campo è conservativo sul disco aperto

$$\Omega = \{(x, y) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 < 1\} ?$$

3. Stabilire il carattere di ciascuna delle seguenti serie, motivando le risposte:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos \frac{1}{n}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = -3e^{3x} \quad (1)$$

- (a) Trovare l'integrale generale (cioè l'espressione di tutte le soluzioni) dell'equazione omogenea associata.
- (b) Trovare l'integrale generale dell'equazione assegnata 1.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 Docente:		Terzo Appello 16 febbraio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. (a) Sia \mathbf{A} una matrice $m \times n$, e sia \mathbf{A}^T la sua trasposta.
 La matrice $(\mathbf{A}^T)\mathbf{A}$ è una matrice quadrata anche quando $m \neq n$?
 E' una matrice simmetrica ?
 E' diagonalizzabile ?

- (b) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

si calcoli il prodotto $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^T)\mathbf{A}$, e si trovino una matrice invertibile \mathbf{S} e una matrice diagonale \mathbf{D} tali che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} = \mathbf{D}$.

2. Stabilire per quali valori del parametro reale a il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(2xy - (a - 1) \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left(x^2 + (a - 1) \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{j}$$

è irrotazionale nel suo insieme di definizione. Si calcoli poi il lavoro del campo lungo la circonferenza C con centro nell'origine e raggio unitario, percorsa in senso antiorario.

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il campo è conservativo nel suo insieme di definizione ?

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il campo è conservativo sul disco aperto

$$\Omega = \{(x, y) : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 < 1\} ?$$

3. Stabilire il carattere di ciascuna delle seguenti serie, motivando le risposte:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n(n+1)}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 3e^{-3x} \quad (2)$$

- (a) Trovare l'integrale generale (cioè l'espressione di tutte le soluzioni) dell'equazione omogenea associata.
- (b) Trovare l'integrale generale dell'equazione assegnata 2.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 Docente:		Terzo Appello 16 febbraio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. (a) Sia \mathbf{A} una matrice $m \times n$, e sia \mathbf{A}^T la sua trasposta.
 La matrice $(\mathbf{A}^T)\mathbf{A}$ è una matrice quadrata anche quando $m \neq n$?
 E' una matrice simmetrica ?
 E' diagonalizzabile ?

- (b) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

si calcoli il prodotto $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^T)\mathbf{A}$, e si trovino una matrice invertibile \mathbf{S} e una matrice diagonale \mathbf{D} tali che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} = \mathbf{D}$.

2. Stabilire per quali valori del parametro reale a il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(y^2 - (a - 2) \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left(2xy + (a - 2) \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{j}$$

è irrotazionale nel suo insieme di definizione. Si calcoli poi il lavoro del campo lungo la circonferenza C con centro nell'origine e raggio unitario, percorsa in senso antiorario.

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il campo è conservativo nel suo insieme di definizione ?

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il campo è conservativo sul disco aperto

$$\Omega = \{(x, y) : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 < 1\} ?$$

3. Stabilire il carattere di ciascuna delle seguenti serie, motivando le risposte:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{(n+1)!}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{n}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y''(x) + 4y'(x) - 5y(x) = -e^x \quad (3)$$

- (a) Trovare l'integrale generale (cioè l'espressione di tutte le soluzioni) dell'equazione omogenea associata.
- (b) Trovare l'integrale generale dell'equazione assegnata 3.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 Docente:		Terzo Appello 16 febbraio 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. (a) Sia \mathbf{A} una matrice $m \times n$, e sia \mathbf{A}^T la sua trasposta.
 La matrice $(\mathbf{A}^T)\mathbf{A}$ è una matrice quadrata anche quando $m \neq n$?
 E' una matrice simmetrica ?
 E' diagonalizzabile ?

- (b) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

si calcoli il prodotto $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^T)\mathbf{A}$, e si trovino una matrice invertibile \mathbf{S} e una matrice diagonale \mathbf{D} tali che $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S} = \mathbf{D}$.

2. Stabilire per quali valori del parametro reale a il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(2xy - (a - 3) \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left(x^2 + (a - 3) \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{j}$$

è irrotazionale nel suo insieme di definizione. Si calcoli poi il lavoro del campo lungo la circonferenza C con centro nell'origine e raggio unitario, percorsa in senso antiorario.

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il campo è conservativo nel suo insieme di definizione ?

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il campo è conservativo sul disco aperto

$$\Omega = \{(x, y) : (x - 4)^2 + (y - 5)^2 < 1\} ?$$

3. Stabilire il carattere di ciascuna delle seguenti serie, motivando le risposte:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (e^{1/n} - 1)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{n3^n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y''(x) + 6y'(x) + 5y(x) = 5e^{-5x} \quad (4)$$

- (a) Trovare l'integrale generale (cioè l'espressione di tutte le soluzioni) dell'equazione omogenea associata.
- (b) Trovare l'integrale generale dell'equazione assegnata 4.